

Étude d'un couple de variables aléatoires discrètes :

École Supérieure d'Informatique, SBA
2^{ième} année CP

19/22-26/29 Novembre 2018

Plan de cours

- 1 Lois de couple de variables aléatoires discrètes
 - Couple de variable aléatoire discrète
 - Lois conjointes et marginales
 - Fonction de répartition
- 2 Lois conditionnelles
- 3 Indépendance de variables aléatoires
 - Indépendance de variables aléatoires
 - Indépendance et événements non élémentaires
- 4 Covariance et corrélation
- 5 Opérations sur les variables aléatoires: somme de 2 v.a.d.
- 6 Exercice

Couple de variable aléatoire discrète: définition

- Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ à valeurs dans deux ensembles finis ou dénombrables $E = X(\Omega)$ et $F = Y(\Omega)$.
 - prenant soit un nombre fini de valeurs, "n" pour la variable X et "m" pour la variable Y ,
 - soit un ensemble dénombrable de valeurs, notées x_i et y_j .

- **Définition et Théorème:**

L'application Z définie de Ω dans $E \times F$ par:

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)),$$

est une variable aléatoire discrète sur Ω .

- La v.a. $Z = (X, Y)$ est appelée "couple de v.a." ou "vecteur aléatoire" de dimension 2.
- On notera par la suite l'événement

$$Z(x_i, y_j) = \{X = x_i, Y = y_j\} = (X = x_i \cap Y = y_j).$$

Exemples: d'un couple de V.A.D.

- **Exemple 1** On lance simultanément deux dés, et on note X le plus grand des deux chiffres obtenus et Y le plus petit.
- **Exemple 2:** Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules vertes et 5 boules bleues. On tire 3 boules dans l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules vertes obtenues.

Loi conjointe d'un couple de v.a.d.

- Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes.
- **Définition et Théorème:**

La loi du couple (X, Y) , appelée **loi de probabilité simultanée ou loi conjointe**, est la loi de la variable aléatoire Z définie par l'ensemble des nombres p_{ij} , ($0 \leq p_{ij} < 1$) tels que :

$$p_{ij} = Pr(X = x_i \cap Y = y_j) .$$

Système complet induit par un couple de v.a.d.

- Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$.
- Étant donnée que X et Y sont des variables aléatoires discrètes finie ou dénombrable, alors

Proposition

Les événements $(X = i) \cap (Y = j)$, pour i parcourant $X(\Omega)$ et j parcourant $Y(\Omega)$, forment un système complet d'événements. On a donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad \text{resp.} \quad \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1 \right).$$

Cas v.a.d. fini: Tableau de contingence

- La loi conjointe se met sous la forme d'un tableau de contingence (présentée sous forme d'un tableau à double entrée, les valeurs prises par X apparaissant par exemple en ligne et celles prises par Y en colonne).

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	total
x_1	p_{11}		p_{1j}		p_{1m}	$p_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	$p_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n.}$
total	$p_{.1}$	$\dots$	$p_{.j}$	$\dots$	$p_{.m}$	1

- Remarque:** Les probabilités $\Pr((X = i) \cap (Y = j))$ peuvent être nulles, même si $\Pr(X = i)$ et $\Pr(Y = j)$ sont toutes les deux non nulles.

Loi conjointe et tableau de contingence: Exemple 1

- On a $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, et la loi conjointe se calcule sans difficulté.
- $\Pr((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ si $i < j$ (le plus grand nombre ne peut pas être inférieur au plus petit), $\Pr((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{36}$. si $i = j$ (le seul tirage favorable sur les 36 possibles est le tirage (i, i) , et $\Pr((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{18}$ si $i > j$ (les deux tirages (i, j) et (j, i) sont possibles).

Loi conjointe et tableau de contingence: Exemple 1

- Ce qu'on peut résumer par le tableau suivant (X en ligne, Y en colonne) :

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Loi conjointe et tableau de contingence: Exemple 2

- On a ici $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. On ne peut bien sûr avoir $X + Y > 3$ puisqu'on ne tire que trois boules. Lorsque cela a un sens, on a

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{C_3^i C_4^j C_5^{3-i-j}}{C_{12}^3},$$

- Ce qui donne le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{220}$
1	$\frac{4}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{55}$	0
2	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{110}$	0	0
3	$\frac{1}{55}$	0	0	0

Lois marginales d'un couple de variables aléatoires:

- Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, les lois de X et de Y sont appelées lois marginales du couple.
- **Lien entre loi conjointe et lois marginales:**

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, on peut obtenir les lois marginales à partir de la loi conjointe:

$$\forall i \in X(\Omega), \Pr(X = i) = \sum_{j=1}^m \Pr[(X = i) \cap (Y = j)] = \sum_{j=1}^m p_{ij},$$

et symétriquement pour la loi de Y :

$$\forall j \in Y(\Omega), \Pr(Y = j) = \sum_{i=1}^n \Pr[(X = i) \cap (Y = j)] = \sum_{i=1}^n p_{ij},$$

- La réciproque est fausse, autrement dit connaître les lois marginales ne suffit pas pour connaître la loi conjointe.

Lois marginales d'un couple de V.A.D.: Exemple 1

- Pour connaître les lois marginales à partir du tableau précédemment établi, c'est très simple, il suffit de faire les sommes des lignes du tableau (pour la loi X) ou des colonnes (pour celle Y):
- Lois marginales:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	$\Pr(X = i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\Pr(Y = j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Lois marginales d'un couple de V.A.D.: Exemple 2

- De façon tout à fait similaire, on va retrouver des lois hypergéométriques pour X et Y :

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$\Pr(X = i)$
0	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{1}{55}$
1	$\frac{4}{22}$	$\frac{6}{22}$	$\frac{3}{55}$	0	$\frac{28}{55}$
2	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{110}$	0	0	$\frac{12}{55}$
3	$\frac{1}{55}$	0	0	0	$\frac{1}{55}$
$\Pr(Y = j)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1

- Exemple 4

- Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire deux boules de l'urne.
- Soit X la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, à 0 sinon.
- Soit Y la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, à 0 sinon.
- Déterminons la loi conjointe du couple (X, Y) et ses lois marginales.
- On distingue les deux types de tirage avec ou sans remise.

Lois marginales d'un couple de V.A.D.: Exemple 3

- Tirage avec remise:

$X \backslash Y$	0	1	$\Pr(X = i)$
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
$\Pr(Y = j)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

- Tirage sans remise:

$X \backslash Y$	0	1	$\Pr(X = i)$
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
$\Pr(Y = j)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

- Les lois marginales sont identiques, alors que les lois conjointes sont différentes. Cela illustre le fait que la donnée des lois marginales ne suffit pas pour obtenir la loi conjointe.

Théorème de transfert

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes, g une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ à valeurs réelle. Alors:

L'espérance de $g(X, Y)$, si elle existe, est donnée par:

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) \Pr(X = x, Y = y) .$$

- En particulier, si X et Y admettant une espérance mathématique et un moment d'ordre 2 (i.e. $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ existent), alors XY admet une espérance mathématique donnée par

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j)} x_i y_j p_{ij} .$$

Fonctions de répartition d'un couple de v.a.d.: définition

- Soient X, Y deux v.a d. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$. On définit:
 - La fonction de répartition conjointe de X et Y par:

$$F_{XY}(x, y) = \Pr [(X \leq x) \cap (Y \leq y)] .$$

- Les fonctions de répartition marginales de X et Y par:
 - $F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = \Pr(X \leq x)$,
 - $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y) = \Pr(Y \leq y)$;

Lois conditionnelles: définition 1

- Soient X, Y des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ à valeurs dans E et F .
- Pour: $y \in Y(\Omega)$, tel que $\{Y = y\}$ ne soit pas négligeable (i.e., $\Pr(Y = y) > 0$), on définit la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$ par:

$$\forall x \in X(\Omega), \Pr(X = x / Y = y) = \Pr_{Y=y}(X = x) = \frac{\Pr[(X = x) \cap (Y = y)]}{\Pr(Y = y)}.$$

- Et plus généralement: $\forall A \subset X(\Omega)$;

$$\Pr(X \in A / Y = y) = \Pr_{Y=y}(X \in A) = \frac{\Pr[(X \in A) \cap (Y = y)]}{\Pr(Y = y)}.$$

Lois conditionnelles: définition 3

- De même, pour : $x \in \Omega$, tel que $\{X = x\}$ ne soit pas négligeable ($\Pr(X = x) > 0$), on définit la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ par:

$$\forall y \in Y(\Omega), \Pr(Y = y/X = x) = \frac{\Pr[(X = x) \cap (Y = y)]}{\Pr(X = x)}.$$

Lien entre loi conjointe, loi marginale et loi conditionnelle.

- La loi de X d'une part, et pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\{X = x\}$ soit non négligeable, la loi de Y sachant $\{X = x\}$ d'autre part, déterminent entièrement la loi conjointe du couple (X, Y) .
- $\Pr(Y = y_j / X = x_i) = \frac{\Pr((X=x_i) \cap (Y=y_j))}{\Pr(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$. Donc
$$\begin{aligned}\Pr((X = x_i) \cap (Y = y_j)) &= p_{ij} = \Pr(Y = y_j / X = x_i) \Pr(X = x_i) \\ &= \Pr(X = x_i / Y = y_j) \Pr(Y = y_j).\end{aligned}$$

Lien entre loi conjointe, loi marginale et loi conditionnelle.

- Grâce à la formule de Bayes, on peut exprimer une loi conditionnelle en fonction de l'autre. Ainsi par exemple:

$$\Pr(X = x_i / Y = y_j) = \frac{\Pr(Y = y_j / X = x_i) \Pr(X = x_i)}{\sum_{i=1}^p \Pr(Y = y_j / X = x_i) \Pr(X = x_i)} .$$

Loi conditionnelle: Exemple 3

- Tirages avec remise:

$Y = 0$			
X	0	1	
	$\Pr_{(Y=0)}(X = x)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
$X = 0$			
Y	0	1	
	$\Pr_{(X=0)}(Y = y)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

$Y = 1$			
X	0	1	
	$\Pr_{(Y=1)}(X = x)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$
$X = 1$			
Y	0	1	
	$\Pr_{(X=1)}(Y = y)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

- Tirages sans remise:

$Y = 0$			
X	0	1	
	$\Pr_{(Y=0)}(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$X = 0$			
Y	0	1	
	$\Pr_{(X=0)}(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$Y = 1$			
X	0	1	
	$\Pr_{(Y=1)}(X = x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$X = 1$			
Y	0	1	
	$\Pr_{(X=1)}(Y = y)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Loi conditionnelle: Exemple 4

- Dans le cas des tirages avec remise, le conditionnement de X par n'importe quelle valeur de Y ne modifie pas la loi de X . On dira que X et Y sont indépendantes en probabilité.
- Dans le cas des tirages sans remise, le conditionnement de X par une valeur de Y modifie la loi de X . On dira que X et Y sont liés en probabilité.

- Dans le cas de variables infinies, on ne peut naturellement plus écrire la loi sous forme de tableau, et les calculs de lois marginales ou conditionnelles sont un peu plus formels.
- **Exemple 4:**
 - On effectue une suite de lancers avec une pièce non équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $\frac{3}{4}$. On note X le nombre de tirages initiaux donnant le même résultat que le premier tirage et on note Y la longueur de la deuxième chaîne. Ainsi, si les premiers tirages donnent *PPPPFFP* (peu importe la suite), on aura $X = 4$ et $Y = 2$.

Loi conditionnelle: le cas v.a.d. infini (2)

- La loi de X se calcule assez aisément: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et on aura $X = k$ si la suite de lancers commence par k Pile suivi d'une face ou par k face suivis d'un Pile, cas incompatibles qui donnent

$$\Pr(X = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \frac{3}{4} = \frac{3^k + 3}{4^{k+1}}.$$

- Pour déterminer la loi de Y , le plus simple est de passer par la loi de couple:
on aura $(X, Y) = (i, j)$ si on débute par " i Pile, puis j Face et à nouveau un Pile", ou bien " i Face, j Pile et un Face", soit une probabilité de

$$\Pr((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \left(\frac{3}{4}\right)^i \left(\frac{1}{4}\right)^j \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^j \times \frac{1}{4} = \frac{3^{i+1} + 3^{j-1}}{4^{i+j+1}}.$$

Loi conditionnelle: le cas v.a.d. infini (3)

- On utilise ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir la loi de Y , avec le système complet d'évènements $(X = i)_{i \geq 1}$:

$$\begin{aligned}\Pr(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr(X = i) \times \Pr(Y = j | X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \Pr((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{3^{i+1} + 3^{j-1}}{4^{i+j+1}} = \frac{1}{4^j} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{i+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^j \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{i+1}} \\ &= \frac{1}{4^j} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^j \frac{1}{4^2} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3^{2+j-1}}{4^{j+1}}.\end{aligned}$$

- Donc, la loi de Y n'est pas la même que celle de X .

- Si on souhaite voir à quoi ressemblent les lois conditionnelles, on a par exemple comme loi conditionnelle à $Y = j$ fixé:

$$\begin{aligned}\Pr(X = i / Y = j) &= \frac{\Pr[(X=i) \cap (Y=j)]}{\Pr(X=i)} \\ &= \frac{3^{i+1} + 3^j}{4^{i+j+1}} \times \frac{4^{j+1}}{3^2 + 3^{j-1}} \\ &= \frac{3^{i+1} + 3^j}{4^i (3^2 + 3^{j-1})} .\end{aligned}$$

- Un autre calcul intéressant sur cette expérience (quoique ne faisant pas vraiment intervenir le fait qu'on travaille sur un couple) est celui des espérances de X et de Y : on a (sous réserve d'existence),

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^k + 3}{4^{k+1}} = \frac{10}{3} \text{ et } \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{3^2 + 3^{k-1}}{4^{k+1}} = 2$$

Indépendance de variables aléatoires: définition

- Deux variables aléatoires sont dites indépendantes si tous les couples d'événements $(X = i)$, $(Y = j)$ sont indépendants. Autrement dit,

$$\forall i \in X(\Omega), \forall j \in Y(\Omega), \Pr((X = i) \cap (Y = j)) = \Pr(X = i) \Pr(Y = j).$$

- D'où les relations

$$\Pr(X = x_i / Y = y_j) = \Pr(X = x_i),$$

$$\Pr(Y = y_j / X = x_i) = \Pr(Y = y_j).$$

- **Remarque 1:** Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si toutes les lois conditionnelles de X sachant $Y = j$ sont identiques à la loi de X .
- **Remarque 2:** Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois marginales.

Indépendance de variables aléatoires: Exemple

- **Exemple 7:** Si on lance deux dés simultanément et qu'on note X le résultat du premier dé et Y celui du deuxième dé, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. On a:

$$\Pr((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{36} \quad \text{pour tout } ; 1 \leq i \leq 6 ; \text{ et } 1 \leq j \leq 6 .$$

- **Exemple 8:** Par contre, toujours dans le cas de l'inépisable lancer de deux dés, si on prend pour X la somme des deux dés et pour Y leur produit, les deux variables ne sont pas indépendantes. On a par exemple $\Pr(X = 8) = \frac{5}{36}$;
 $\Pr(Y = 15) = \frac{1}{18}$, et $\Pr((X = 8) \cap (Y = 15)) = \frac{1}{18}$.

Indépendance de variables aléatoires: Exemple

- Dans l'exemple 1 et l'exemple 2, on constate sans difficulté et sans surprise que les variables X et Y ne sont pas indépendantes (le fait qu'on ait des 0 dans la tableau de la loi conjointe suffit à imposer qu'il n'y ait pas indépendance).
- **L'exemple 4:** le calcul des lois conditionnelles, qui sont distinctes de la loi marginale de X , prouve qu'il n'y a pas non plus indépendance.

Une autre façon de voir les choses est de trouver un contre-exemple à l'indépendance des événements $X = i$ et $Y = j$. On peut ici calculer simplement: $\Pr(X = 1) = \frac{3+3}{4^2} = \frac{3}{8}$, $\Pr(Y = 1) = \frac{3^2+1}{4^2} = \frac{5}{8}$ et $\Pr((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{3^2+3}{4^3} = \frac{3}{16} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}$.

- **Théorème:**

Si X et Y sont indépendantes et f et g des fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, à valeurs réelles, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ un ensemble probabilisé.
- Soient X et Y des variables aléatoires discrètes de Ω dans E et F .
- Si X et Y sont indépendantes, alors: $\forall A \subset X(\Omega), \forall B \subset Y(\Omega)$,

$$\Pr((X \in A) \cap (Y \in B)) = \Pr(X \in A) \Pr(Y \in B) .$$

- X et Y sont indépendantes si et seulement si

Théorème

$$\forall (x, y), F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

- **Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes:**

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ un ensemble probabilisé. Soient X et Y des variables aléatoires discrètes réelles sur Ω admettant une espérance. Alors $X.Y$ admet une espérance et si X et Y sont indépendantes, on a: $\mathbb{E}(X.Y) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$.

Covariance

- On définit la covariance d'un couple (X, Y) par:

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

- Cas discret:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} p_{ij}(x_i - \mathbb{E}(X))(y_j - \mathbb{E}(Y)) ,$$

où $p_{ij} = \Pr [(X = x_i) \cap (Y = y_j)]$.

- On a alors : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.
- $\text{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\text{cov}(X_1, Y) + b\text{cov}(X_2, Y)$ et $\text{cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.

- On définit le coefficient de corrélation d'un couple (X, Y) par:

$$\text{corr}(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- On a toujours $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$. Plus $|\rho(X, Y)|$ est proche de 1 plus la dépendance entre les variables X et Y est forte.

- Deux v.a indépendantes sont décorrélées:

$$X, Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \rho(X, Y) = 0.$$

- Mais l'inverse est faux.
- **Exemple 9:** Soit X la v.a.r. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que: $\Pr(X = -1) = \Pr(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $\Pr(X = 0) = \frac{1}{2}$. Soit $Y = X^2$.
 - On a: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X) = 0$, et donc $Ee(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = 0$ et $Cov(X, Y) = 0$.
 - Mais $\Pr[(X = 0), (Y = 1)] = \Pr(\emptyset) = 0$ et $\Pr(X = 0) \cdot \Pr(Y = 1) = \Pr(X = 0) \cdot \Pr(X = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

- **Exemple 9:** Soit X la v.a.r. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ telle que: $\Pr(X = -1) = \Pr(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $\Pr(X = 0) = \frac{1}{2}$. Soit $Y = X^2$.
- On a: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X) = 0$, et donc $Ee(XY) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = 0$ et $Cov(X, Y) = 0$.
- Mais $\Pr[(X = 0), (Y = 1)] = \Pr(\emptyset) = 0$ et $\Pr(X = 0) \cdot \Pr(Y = 1) = \Pr(X = 0) \cdot \Pr(X = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

La somme de 2 V.A.D.

- Soient X, Y des variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, et soit $S = X + Y$. Alors, $\forall s \in (X + Y)(\Omega)$, on a:

$$\begin{aligned}\Pr(S = s) &= \sum_{x+y=s} \Pr_{X,Y}(x, y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \Pr_{X,Y}(x, s - x) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \Pr_{X,Y}(s - y, y) .\end{aligned}$$

La somme de 2 V.A.D.: cas indépendant

- En particulier, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la loi de leur somme $X + Y$ est donné par

$$\begin{aligned}\Pr(X + Y = k) &= \sum_i \Pr(X = i) \Pr(Y = k - i) \\ &= \sum_j \Pr(X = k - j) \Pr(Y = j) .\end{aligned}$$

(La somme portant sur les valeurs de i pour lesquelles $\Pr(X = i)$ et $\Pr(Y = k - i)$ sont toutes deux non nulles).

La somme de 2 V.A.D.:Exemple

- Deux variables aléatoires X et Y suivant des lois uniformes respectivement sur $\{1; 2; \dots; 6\}$ et sur $\{1; 2; 3; 4\}$ (par exemple les résultats d'un lancer de dés à six faces et à quatre faces). La loi de $X + Y$ se calcule aisément:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Pr(X + Y = i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

Exercice 1

- On considère deux Tirages indépendants et uniformes dans $\{1, 2, 3, 4\}$.
 $X = T_1$ (résultat de premier tirage) et $Y = \max(T_1, T_2)$.
 - Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) , les lois marginales, ainsi que leurs espérances.
 - Calculer $Cov(X, Y)$. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?
 - Déterminer les lois conditionnelles de Y sachant $(X = k)$.
- La loi est donnée par :

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

Exercice 2

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tous entiers naturels i et j :

$$\Pr[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{\alpha}{2^{i+j}}$$

- 1 Déterminer la valeur de α .
- 2 Déterminer les lois marginales de X et Y .
- 3 Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

- On lance trois fois de suite un dé. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues.

Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

- 1 Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
- 2 On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y et son espérance.