

Notion de Variable aléatoire

Lois d'une variable aléatoire

Faculté de Médecine, UDL, SBA
1^{ère} année Médecine

19 Décembre 2023



Plan de cours

- 1 Variable aléatoire
 - Variable aléatoire: Définition
- 2 Variables aléatoires discrètes
 - Variable aléatoire discrète: définition
 - Loi d'une variable aléatoire sur un espace de probabilité fini
 - Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète
 - Fonction de répartition
- 3 Variable aléatoire continue
 - Variable aléatoire continue: Définition
 - Fonction de répartition
 - Loi d'une variable aléatoire continue
 - Caractéristiques d'une variable aléatoire continue



Variable aléatoire: Introduction

- Une variable aléatoire désigne la grandeur mesurée lors d'une expérience aléatoire. Exemples :
 - Âge (en années)
 - Tension artérielle systolique (en mmHg)
 - Stades de gravités d'une maladie (0-1-2-3-4)
 - Sexe (Homme/Femme)
 - Couleur des yeux (marron, noir, vert, bleu, ...)
 - Cancer (Presence/Absence)
 - Nombre de malades
- Mesures qui varient d'un individu à l'autre.
- Résultats possibles de l'expérience \Rightarrow valeurs possibles de la variable aléatoire

- Types de variables aléatoires

- ◇ Si résultats numériques (variable quantitative)
 - ▷ V.a. continue : les valeurs couvrent \mathbb{R} ou un intervalle
 - ▷ V.a. discrète : les valeurs sont discrète (discontinues) (\mathbb{N})
- ◇ Sinon (variable qualitative)
 - ▷ V.a. ordinale : les valeurs sont ordonnées
 - ▷ V.a. nominale ou catégorielle : valeurs sans ordre

Variable aléatoire: Exemple de codage 1

- Si Pile, A gagne 10 DA
- Si Face, A perd 10 DA
- $\Omega = \{Pile, Face\}$, $\Pr(Pile) = \Pr(Face) = 0.5$
- G: gain de A:
 - $G = +1$, si Pile;
 - $G = -1$, si Face
- $\Pr(G = +1) = \Pr("Pile") = 0.5$ et
 $\Pr(G = -1) = \Pr("Face") = 0.5$
- Distribution de G : $\{(+1, 0.5), (-1, 0.5)\}$

G : variable aléatoire qui suit une certaine loi de probabilité

Variable aléatoire: Définition

- Au sens strict, une **variable aléatoire** produit toujours un **résultat numérique**
- Une v.a. est un codage des résultats d'expérience conduisant à des nombres
 - Si les résultats sont déjà numériques, le **codage** peut être l'identité
- On va reprendre ce qui a été vu (événements et probabilités) pour l'adapter aux v.a.

Variable aléatoire discrète: Définition

- Soit (Ω, \mathcal{A}) un ensemble (on dit un espace) muni de l'ensemble d'événements de l'ensemble fondamental Ω .
- Soit E un ensemble quelconque finie ou dénombrable.
- \Pr une probabilité sur Ω .
- **Définition:**

On appelle variable aléatoire discrète (ou v.a.d.) toute application X de Ω dans E une partie **finie ou dénombrable** de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow E \subset \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

tel que: $\forall x \in E, X^{-1}(x) \in \mathcal{A}$, autrement dit $X^{-1}(x)$ est un évènement.

- Pour: $x \in E$, on notera $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'évènement $X^{-1}(x)$.

Variable aléatoire: Exemple

- Jeu de dé : $\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
- V.a. : $X(f_1) = 10; X(f_2) = 20, \dots, X(f_6) = 60$
- $[20 \leq X \leq 35] = \{f_2, f_3\}$
- $[X < 35] = \{f_1, f_2, f_3\}$
- $[X = 40] = \{f_4\}$
- $[X = 35] = \emptyset$

Variable aléatoire: Exemple 2

- Si Ω est l'ensemble des élèves d'une classe, on peut à chaque élève ω associer le nombre $X(\omega)$ de ses frères et soeurs. X est alors une fonction à valeur dans un ensemble fini: c'est une variable aléatoire discrète.
- Somme des résultats de deux dés :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow E \\ (m, n) &\mapsto m + n. \end{aligned}$$

Et on a par exemple $\{X = 3\} = X^{-1}(3) = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Système complet induit par une v.a.d.

- Soient (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète (fini) sur Ω à valeurs dans E .
- Étant donnée que X est une variable aléatoire discrète finie, alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Alors:

Théorème

La famille des parties $(\{X = x_i\}, i \in \{1, \dots, n\})$ forme un système complet d'événements.

Loi d'une variable aléatoire discrète

- Soit (Ω, \mathbf{Pr}) donné et $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire.
- On pose $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et $E = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.
- Définissons:

$$p_i = \mathbf{Pr}(X = x_i) = \mathbf{Pr}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\})$$

- On remarque que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}(X = x_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Pr}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}) \\ &= \mathbf{Pr}(\cup_{i=1}^n \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}) \\ &= \mathbf{Pr}(\Omega) = 1, \end{aligned}$$

(puisque ce sont des ensemble disjoints).

- Donc (p_1, p_2, \dots, p_k) définit une probabilité sur E .

Définition

On appelle loi de la variable aléatoire discrète X la donnée des probabilité $\Pr(X = x_i)$ (la probabilité \Pr_X sur E telle que: $p_i = \Pr(X = x_i)$).

- Cette définition s'étend bien sûr au cas d'une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble infini dénombrable.
- Dans la suite, on se limite au cas des variables aléatoires discrète à valeurs dans un ensemble fini. Les notions et propriétés étudiées s'étendent bien sûr au cas des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble dénombrable infini.

Loi de variable aléatoire discrète: Exemple 1

- On lance deux pièces de monnaie. L'ensemble fondamental comprend 4 événements élémentaires notés PP; PF; FP; FF, de probabilité chacun $1/4$.
- On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenus.
- X prend les valeurs 0, 1, 2.
- $\Pr(X = 0) = 1/4$, $\Pr(X = 1) = 1/4$ et $\Pr(X = 2) = 1/4$.
- On représente souvent la loi de probabilité à l'aide d'un tableau:

X	0	1	2
$\Pr(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Loi d'une variable aléatoire discrète: Exemple

- Lancer successif de 2 dés.
- Soit X la variable "somme".
- Sa loi sera une probabilité sur l'ensemble $\{2, 3, \dots, 12\}$.
Par exemple:

$$\Pr_X(\{3\}) = \Pr(X^{-1}(\{3\})) = \Pr(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Pr(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Loi d'une variable aléatoire discrète: Exemple 3

- Extraire 4 boules d'un sac contenant 4 boules blanches et 6 boules rouges. Quelle est la loi de nombre de boules blanches ?

Les événements distincts: "obtenir 0 boule blanche (b.b.)", "obtenir 1 b.b.", "obtenir 2 b.b.", "obtenir 3 b.b." et "obtenir 4 b.b."

Loi d'une variable aléatoire discrète: Exemple 3

Soit X : nombre des boules blanches; donc:

$$X(\omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Loi de probabilité de X est : $\Pr_X = p_i = \Pr(X = x_i) = ?$

- cas possibles: $C_{10}^4 = 210$,
- cas favorables pour "0 b.b.": $C_4^0 \times C_4^6 = 15$,
- cas favorables pour "1 b.b.": $C_4^1 \times C_3^6 = 80$,
- cas favorables pour "2 b.b.": $C_4^2 \times C_2^6 = 90$,
- cas favorables pour "3 b.b.": $C_4^3 \times C_1^6 = 24$,
- cas favorables pour "4 b.b.": $C_4^4 \times C_0^6 = 1$.

Loi d'une variable aléatoire discrète: Exemple 3

Donc la loi de X est:

X	0	1	2	3	4
$\Pr(X = x_i)$	$\Pr(X=0)$ $= 15/210$	$\Pr(X=1)$ $= 80/210$	$\Pr(X=2)$ $= 90/210$	$\Pr(X=3)$ $= 24/210$	$\Pr(X=4)$ $= 1/210$

et on a $\sum_{i=1}^5 \Pr(X = x_i) = 1$.

Caractéristiques de position: Moyenne ou Espérance

- **Moyenne** au niveau de la **population**
- Notation $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \mu$
- Calcul : somme de toutes les valeurs pondérées par leur probabilité
 - ◇ Variable discrète X
 - ★ soit X une *v.a.* prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n et $\sum p_i = 1, i = 1, \dots, n$:

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$



Caractéristiques de position: Exemple

- Exemple 1 : $\mu = (p \times 1) + (q \times 0) = p$
- Exemple 2 : $\mu = 1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 3,5$

- **Variance** = mesure de la variabilité autour de l'espérance
- Notation $var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$
- Définition: $var(x) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
- Calcul
 - Cas d'une variable discrète X

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i [x_i - \mu]^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2$$

- σ^2 = Variance , σ = Écart-type

Caractéristiques de dispersion: Exemple

- Exemple 1 : $\sigma^2 = p \times (1 - p)^2 + q \times (0 - p)^2 = p \times q$
- Exemple 2 :
 $\sigma^2 = 1/6[(1 - 3,5)^2 + (2 - 3,5)^2 + \dots + (6 - 3,5)^2] = 2.9.$

Fonction de répartition: Définition

- Soit X une v.a. discrète sur Ω telle que
 $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.
- On cherche une fonction définissant la probabilité de tout intervalle $[a; b]$
- Soit l'événement $[X \leq x]$ où x est un nombre, i.e., ensemble des résultats d'expérience dont le codage est inférieur ou égal à x .
- $\Pr([X \leq x])$ dépend de la valeur x
- $F_X(x) = F(x) = \Pr([X \leq x]) =$ **fonction de répartition de X**



Fonction de répartition: Définition

- **Définition:**

C'est la fonction $F : x \in E \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, définie par:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) .$$



Fonction de répartition: propriétés

- 1 F est une fonction en escalier croissante;
- 2 $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 3 Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$;
- 4 Si $x_j \leq x < x_{j+1}$, alors $F(x) = \sum_{i=1}^j p_i$;
- 5 Si $x \geq x_n$, alors $F(x) = 1$;
- 6 Cas infini dénombrable: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- 7 F est discontinue (continue à droite en tout x_i) réel.
- 8 En chaque point x de discontinuité, la hauteur du saut
- 9 $a < b \Rightarrow \Pr([X \leq b]) = \Pr([X \leq a]) + \Pr([a < X \leq b])$
car $[X \leq a]$ et $[a < X \leq b]$ = événements exclusifs

Fonction de répartition: remarque

- F permet de calculer la probabilité pour que X soit compris entre deux valeurs a et b :

$$\Pr(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a),$$

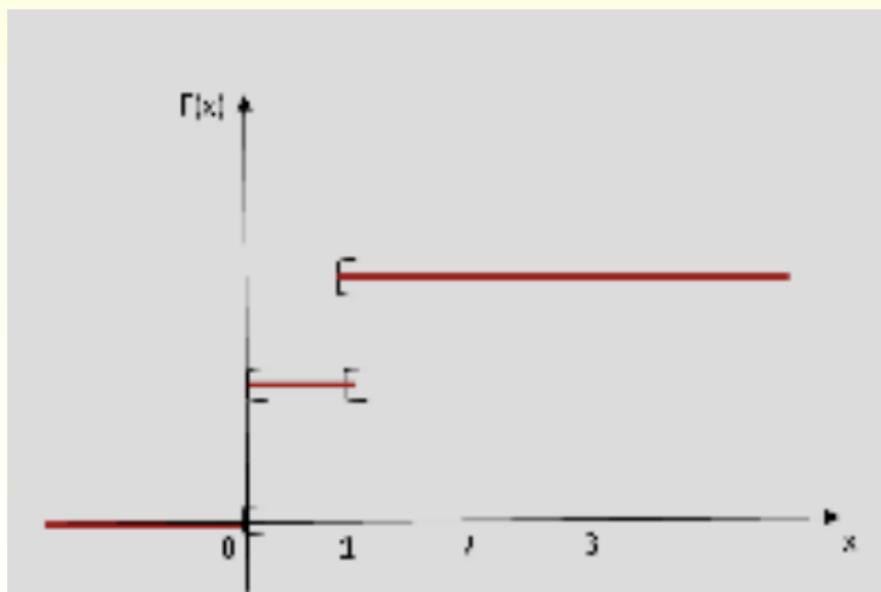
(penser à la fonction des fréquences cumulées)

- Connaissant la fonction de répartition F d'une variable aléatoire discrète X on peut retrouver la distribution de probabilité de X :

$$\Pr(X = x_j) = p_j = \sum_{i=1}^j p_i - \sum_{i=1}^{j-1} p_i = F(x_j) - F(x_{j-1}), j \geq 2.$$

Fonction de répartition: exemple d'une v.a. discrète

- Jet d'une pièce : $\Omega = \{P, F\}$; $\Pr(P) = \Pr(F) = \frac{1}{2}$
- V.a. $X : X(F) = 0 ; X(P) = 1$
- Fonction de répartition



Introduction:

- Une variable aléatoire continue prend ses valeurs sur un ensemble infini non dénombrable de points, elle décrit par exemple
 - la durée de vie d'une batterie de voiture,
 - l'heure d'arrivée des voitures à un péage donné d'autoroute,
- Ces exemple ne peut pas être modélisé à l'aide de variables aléatoires discrètes.



Densité de probabilité: définition

On appelle densité ou densité de probabilité sur \mathbb{R} , toute fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant:

- f est positive;
- f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Variables aléatoire continue: définition

Une variable aléatoire réelle X est dite à densité s'il existe une fonction f_X continue (mesurable) positive de \mathbb{R} dans $[0, +\infty]$, telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 ,$$

et vérifiant, pour toute partie A de \mathbb{R} , la propriété:

$$\Pr(X \in A) = \int_A f(x)dx.$$

- f_X est alors une densité, appelée densité de X (et de P_X) et X est une variable aléatoire réelle à densité.

- on note X la taille des élèves d'une classe (c'est une variable continue). La densité de la loi de X est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

- On dit que la loi de X est la **loi normale** d'espérance μ et d'écart-type σ .

Fonction de répartition

- La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par:

$$F(a) = \Pr(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$

- Pour toutes les valeurs a et b appartenant à \mathbb{R} , on a donc la relation:

$$\Pr(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

- On en déduit:

$$\Pr(X = x) = 0 \quad \Pr(x \leq X < x + dx) = f(x)dx.$$

- 1 F est monotone croissante;
- 2 $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$;
- 4 F est continue à droite en tout x réel.
- 5 $a < b \Rightarrow \Pr([X \leq b]) = \Pr([X \leq a]) + \Pr([a < X \leq b])$
car $[X \leq a]$ et $[a < X \leq b]$ = événements exclusifs

Fonction de répartition: Théorème

- On admet le théorème important suivant:

La fonction de répartition caractérise la loi: deux v.a. ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition.

Loi d'une variable aléatoire continue

- Densité de proba $f(x)$
- loi de probabilité $\Pr([a \leq X \leq b]) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Propriétés:
 - $f(x) \geq 0$
 - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
 - La fonction de répartition: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$



Caractéristiques de position: Moyenne ou Espérance

- **Moyenne** au niveau de la **population**
- Notation $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \mu$

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

- L'espérance peut ne pas exister (existe si l'intégrale est définie).
- Valeur de l'espérance mathématique issue d'un calcul:
 - ponctuel pour f connue,
 - théorique pour f inconnue.

- **Propriétés:**

- Soient des v.a. X et Y et des constantes a, c
 - $\mathbf{E}(c) = c$
 - $\mathbf{E}(X + c) = \mathbf{E}(X) + c$
 - Si $c = -\mathbf{E}(X) \Rightarrow \mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X)) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X) = 0$
Une v.a. d'espérance nulle est dite **centrée**
 - $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$
 - $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$

Caractéristiques de dispersion: Variance, Écart-type

- **Variance** = mesure de la variabilité autour de l'espérance
- Notation $var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$
- Définition: $var(x) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
- Calcul

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (\mathbb{E}(X))^2$$

- σ^2 = Variance , σ = Écart-type

Variance : propriétés

- $Var(X) \geq 0$ (somme de carrés)
 - Variance nulle pour une constante
 - Variance faible pour une variable peu dispersée
- Si X possède une unité
 - ◇ $\mathbb{E}(X)$ et σ ont la même unité
 - ◇ $Var(X)$ a cette unité au carré
- Si c est une constante
 - ◇ $Var(c) = 0$
 - ◇ $Var(X + c) = Var(X)$
 - ◇ $Var(cX) = c^2 Var(X)$
- $Var(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
- Rappel: $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Remarques:

- Les lois de distribution, ou distributions de probabilités, montrent la probabilité d'apparition de toutes les valeurs d'une variable théorique.
- Les lois de distribution servent d'abord au calcul direct de la probabilité d'apparition de certains événements, une fois que l'on connaît la loi de distribution du phénomène.
- Lors des tests statistiques paramétriques, nous nous référerons à ces mêmes lois de distribution pour trouver la probabilité que les données soient conformes à une certaine hypothèse nulle.
⇒ La compréhension des lois de distribution suppose que la notion de probabilité soit connue et comprise

Pour définir une v.a.: Résumé

	v.a. discrète	v.a. continue
Définition de la loi de probabilité	Tableau des $p_i = \mathbf{Pr}(X = x_i)$	Densité de proba $f(x)$ $\mathbf{Pr}([a \leq X \leq b]) = \int_a^b f(x)dx$ $= F(b) - F(a)$
Propriétés	$p_i \geq 0$ $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$f(x) \geq 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ $f(x)dx = \mathbf{Pr}(x \leq X \leq x + dx)$ $f(x)dx \approx \mathbf{Pr}(X = x)$

- Cours Probabilité, Benchikh Tawfik,
<http://www.univ-sba.dz/lsp/s/images/pdf/cours/>
- Probabilités et Biostatistique.
www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/CoursProba1.pdf
- FMPMC Pitié-Salpêtrière - probabilités, cours 1 et 2
www.chups.jussieu.fr/polys/biostats/coursProba-1-2/
- Notions de Probabilités, Roch Giorgi, LERTIM, Faculté de Médecine, Université de la Méditerranée, Marseille, France
<http://lertim.fr>