



Commencer par les questions et les exercices qui vous paraissent simples.
Tous les documents sont interdits ainsi que l'utilisation de **calculatrices** et **téléphones**.

Exercice 1 (Développements limités 03 pts).

1. Donner, au voisinage de $x_0 = 0$, les développements limités d'ordre 4 de $\sin x$, $\cos x$ et $\cos(x^2)$. **(1,5 pts)**
2. Dédurre $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\cos(x^2) - 1} \right)$. **(1,5 pts)**

Exercice 2 (Calcul Intégral 06 pts).

1. En intégrant par partie, calculer : $I(x) = \int e^x \cos(x) dx$. **(02 pts)**
2. Par un simple changement de variable, calculer $J(x) = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$. **(02 pts)**
3. Dédurre la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$. **(02 pts)**

Exercice 3 (Equations différentielles du deuxième degré 08 pts).

Etant donnée l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + xe^x.$$

1. Calculer ses racines caractéristiques. **(01 pt)**
2. Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée. **(01 pt)**
3. Donner les solutions particulières de l'équation. **(2,5 pts + 2,5 pts)**
4. Dédurre la solution générale de l'équation. **(0,5 pt + 0,5 pt)**

Exercice 4 (Equations différentielles du premier degré 03 pts).

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x^2 + 1)y' + 2x y = x + e^x \quad .(03 pts)$$

**Exercice 1 (Développements limités 03 pts).**

1. Donner, au voisinage de $x_0 = 0$, les développements limités d'ordre 4 de $\sin x$, $\cos x$ et $\cos(x^2)$. (01,5 pts)

2. Dédurre $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\cos(x^2) - 1} \right)$. (01,5 pts)

Correction :

1. Les développements limités d'ordre 4 au voisinage de $x_0 = 0$, de $\sin x$, $\cos x$ et $\cos(x^2)$ sont

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad (0,5\text{pt})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad (0,5\text{pt})$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \quad (0,5\text{pt})$$

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\cos(x^2) - 1} &= \frac{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) + 2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - 2}{\left(1 - \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \right) - 1} \\ &= \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} \quad (0,5\text{pt}) \end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x + 2 \cos x - 2}{\cos(x^2) - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{1}{12} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \right) = \frac{1}{6} \quad (01\text{pt})$$

■ A. HAKEM ■

Exercice 2 (Calcul Intégral 06 pts).

1. En intégrant par partie, calculer : $I(x) = \int e^x \cos(x) dx$. (02 pts)

2. Par un simple changement de variable, calculer $J(x) = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$. (02 pts)

3. Dédurre la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$. (02 pts)

Correction :

1. Une première intégration par partie donne

$$I(x) = \int e^x \cos(x) dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin(x) dx \quad (0,5 \text{ pt})$$

On intègre une deuxième fois par partie $I_1(x) = \int e^x \sin(x) dx$

$$I_1(x) = \int e^x \sin(x) dx = \int e^x d(-\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos(x) dx = -e^x \cos x + I(x) \quad (0,5 \text{ pt})$$

en reportant $I_1(x)$ dans l'expression de $I(x)$ on obtient

$$I(x) = e^x \sin x - (-e^x \cos x + I(x)) = e^x \sin x + e^x \cos x - I(x)$$

donc

$$I(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x). \quad (01 \text{ pt})$$

2. On fait le changement de variable

$$u = e^x \implies du = e^x dx, \quad (0,5 \text{ pts})$$

par suite

$$J(x) = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{e^x dx}{1 + (e^x)^2} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \text{Arctg}(u) + C = \text{Arctg}(e^x) + C. \quad (01,5 \text{ pts})$$

2. La fonction $\frac{e^x}{1 + e^{2x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$, alors on a

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = [\text{Arctg}(e^x)]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctg}(e^x) - \text{Arctg}(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \quad (02 \text{ pts})$$

■ A. HAKEM ■

Exercice 3 (Equations différentielles du deuxième degré 08 pts).

Etant donnée l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + xe^x.$$

1. Caculer ses racines caractéristiques. (01 pt)
2. Donner toutes les solutions de l'équation homogène associée. (01 pt)
3. Donner les solutions particulières de l'équation. (2,5 pts + 2,5 pts)
4. Dédurre la solution générale de l'équation. (0,5 pt + 0,5 pt)

Correction :

1. L'équation caractéristique est donnée par :

$$r^2 - 3r + 2 = 0. \quad (0,25 \text{ pt})$$

Comme

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1. \quad (0,25 \text{ pt})$$

D'où on a deux racines distinctes données par

$$r_1 = 2; \quad r_2 = 1. \quad (0,5 \text{ pt})$$

2. Les solutions de l'équation homogène associée sont données par :

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (01 \text{ pt})$$

3. On calcule séparément les deux solutions particulières. Le premier second membre e^{-x} est de la forme Ae^{mx} avec $m = -1$. Comme -1 n'est pas une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_{p_1}(x) = Ae^{-x}, \quad \text{avec } A \text{ une constante réelle à déterminer.} \quad (01 \text{ pt})$$

En dérivant, on trouve

$$y'_{p_1}(x) = -Ae^{-x}. \quad (0,25\text{pt})$$

$$y''_{p_1}(x) = Ae^{-x}. \quad (0,25\text{pt})$$

On reporte dans l'équation complète et on fait l'identification, on aura :

$$y'' - 3y' + 2y = 6Ae^{-x} = e^{-x}, \quad (0,25\text{pt})$$

d'où

$$A = \frac{1}{6}. \quad (0,25 \text{ pt})$$

La première solution particulière est donnée par

$$y_{p_1}(x) = \frac{1}{6}e^{-x} \quad (0,5\text{pt})$$

Le deuxième second membre xe^x est de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $m = 1$. Comme 1 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_{p_2}(x) = (Ax^2 + Bx)e^x, \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles à déterminer.} \quad (01,5 \text{ pts})$$

En dérivant, on trouve

$$y'_{p_2}(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x. \quad (0,25\text{pt})$$

$$y''_{p_2}(x) = 2Ae^x + (4Ax + 2B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x. \quad (0,25\text{pt})$$

On reporte dans l'équation complète et on fait l'identification, on aura :

$$y'' - 3y' + 2y = 2Ae^x + (4Ax + 2B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x - (6Ax + 3B)e^x - (3Ax^2 + 3Bx)e^x + (2Ax^2 + 2Bx)e^x = xe^x, \quad (0,25\text{pt})$$

d'où

$$A = -\frac{1}{2}, B = -1. \quad (0,25 \text{ pt})$$

La deuxième solution particulière est donnée par

$$y_{p_2}(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x \quad (0,25\text{pt})$$

4. La solution générale de l'équation est donnée par

$$y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (0,5 \text{ pt} + 0,25 \text{ pt})$$

■ A. HAKEM ■

Exercice 4 (Equations différentielles du premier degré 03 pts).

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(x^2 + 1)y' + 2x y = x + e^x \quad (03 \text{ pts})$$

Correction :

1. Il ya deux méthodes :

1. Méthode 1 : **Facteur intégrant.**

L'équation peut être mise sous la forme $y' + p(x)y = q(x)$ avec $p(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ et $q(x) = \frac{x+e^x}{x^2+1}$.

Le facteur intégrant est donné par

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1. \quad (01 \text{ pt})$$

La solution générale est donnée par

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \times \int \mu(x)q(x)dx = \frac{1}{x^2+1} \int (x+e^x) dx = \frac{1}{x^2+1} \left(\frac{x^2}{2} + e^x + C \right). \quad (01 \text{ pt})$$

La solution générale est :

$$y_g(x) = \underbrace{\frac{C}{x^2+1}}_{y_h(x)} + \underbrace{\frac{x^2+2e^x}{2(x^2+1)}}_{y_p(x)}. \quad (01 \text{ pt})$$

2. Méthode 2 : **Variation de la constante**

On résoud tout d'abord l'équation homogène

$$(x^2+1)y' + 2x y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{C}\right) = -\ln(x^2+1) \Rightarrow y_h(x) = \frac{C}{x^2+1}. \quad (01 \text{ pt})$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x^2+1} \Rightarrow y'_p(x) = \frac{C'(x)(x^2+1) - 2x C(x)}{(x^2+1)^2}.$$

On remplace dans l'équation complète on trouve

$$(x^2+1) \frac{C'(x)(x^2+1) - 2x C(x)}{(x^2+1)^2} + 2x \frac{C(x)}{x^2+1} = x + e^x \Rightarrow C'(x) = x + e^x \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + e^x. \quad (01 \text{ pt})$$

La solution générale est donnée par

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x^2+1} + \frac{x^2+2e^x}{2(x^2+1)}. \quad (01 \text{ pt})$$

■ A. HAKEM ■