

UNIVERSITÉ DJILALI LIABÈS - SIDI BEL ABBÈS

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DES EBST



Algèbre Linéaire Avancée

COURS POUR LA LICENCE 2

AVEC APPLICATIONS ET MÉTHODES DE RÉOLUTION

Auteur :

M. Yahiaoui Mohammed

Maître de Conférences "B"

Département des EBST

Université de Sidi Bel Abbès

Année Universitaire : 2025-2026

Table des matières

Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants de deuxième année de Licence (Licence 2) en Mathématiques ou dans des disciplines connexes (Physique, Informatique, etc.). Il a pour objectif de consolider et d'approfondir les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire, en établissant un pont essentiel entre la théorie des espaces vectoriels et ses applications les plus puissantes.

On commence par des rappels sur les espaces vectoriels, en insistant sur les notions de base, de dimension et de somme directe, qui sont le langage commun de toute la suite. Forts de ces fondations, nous plongerons dans le cœur de l'ouvrage : la réduction des matrices carrées. Vous découvrirez comment simplifier l'étude des applications linéaires via la diagonalisation, la trigonalisation, et vous serez initiés à la puissante théorie de la réduction de Jordan.

La théorie trouve ensuite son application la plus concrète dans la résolution des systèmes d'équations différentielles, démontrant la puissance de l'algèbre linéaire en analyse. Enfin, nous explorerons le riche domaine des formes bilinéaires et quadratiques, puis des espaces vectoriels euclidiens et hermitiens, qui donnent un sens aux notions de longueur, d'angle et d'orthogonalité, fondamentales pour la géométrie et de nombreux domaines appliqués.

Nous espérons que ce parcours, reliant rigueur théorique et applications significatives, vous permettra de maîtriser ces outils indispensables et d'apprécier l'élégance et l'unité de l'algèbre linéaire.

Chapitre 1

Rappels sur les espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels : Définitions

Si K est un corps commutatif, on appelle espace vectoriel sur K un ensemble E muni de deux lois de composition :

A) Une loi interne dans E , notée $+$ (addition) et qui vérifie :

i) L'associativité : $\forall x, y, z \in E \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

ii) La commutativité $\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x$

iii) L'existence d'un élément neutre (noté 0 , 0_E pour insister sur l'ensemble E en question) tel que $\forall x \in E, \quad x + 0 = x$.

iv) Pour tout $x \in E$ il existe un élément noté $-x$, dit opposé de x , tel que $x + (-x) = 0$.

B) Une loi externe par laquelle le produit αx d'un élément $\alpha \in K$ par un élément $x \in E$, appartient lui même à E , et ce produit vérifie :

i) Une " associativité externe" :

$$\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in K, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$\text{ii) } \forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in K, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\forall \alpha \in K, \forall x, y \in E, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

iii) L'existence d'un élément neutre (noté 1 ou 1_E) de K pour la multiplication externe : $\forall x \in E, \quad 1.x = x$.

Un sous ensemble F de E est un sous espace vectoriel (s.e.v) si et seulement si

i) $F \neq \emptyset$

ii) Si $x, y \in F$, et pour tout $\alpha, \beta \in K$, on a: $\alpha x + \beta y \in F$.

1.1.1 Bases

Une famille de vecteurs $G = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ d'un espace vectoriel E , est dite génératrice si tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de G . i.e $\forall x \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in K$ tel que $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = \sum_i \alpha_i v_i$

Définition 1.1 *Un espace vectoriel E est de dimension finie si E admet une famille génératrice ayant un nombre fini d'éléments.*

Définition 1.2 Soit (v_1, v_2, \dots, v_p) une famille d'éléments d'un espace vectoriel E . Cette famille est dite liée (non libre), si l'un au moins des vecteurs v_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Définition 1.3 On appelle base, une famille à la fois libre et génératrice.

Théorème 1.1 Soit $E \neq \emptyset$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors

- 1) De toute famille génératrice on peut extraire une base.
- 2) Toute famille libre peut être complétée de manière à former une base.

1.1.2 La dimension d'un espace vectoriel

Théorème 1.2 Toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments n , n est appelé la dimension de E et est noté $\dim E$.

Dans un espace vectoriel de dimension n , toute famille de plus de n éléments est liée. Dans un espace vectoriel de dimension n , une famille de moins de n éléments ne peut pas être génératrice.

Théorème 1.3 Si E est un espace vectoriel de dimension n , alors :

- i) Toute famille génératrice de n éléments est une base.
- ii) Toute famille libre de n éléments est une base.

Théorème 1.4 Si E est un espace vectoriel et F un sous espace de E , alors

- i) $\dim F \leq \dim E$
- ii) $\dim F = \dim E \iff E = F$.

1.1.3 Somme et somme directe

Définition 1.4 Si E_1, E_2, \dots, E_p sont des sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E , on définit la somme

$$S = E_1 + E_2 + \dots + E_p = \left\{ x \in E / \exists x_i \in E_i \ (i = 1, 2, \dots, p) \text{ avec } x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}.$$

Définition 1.5 Si la décomposition $x = \sum_{i=1}^p x_i$ de tout vecteur $x \in \sum_{i=1}^p E_i$ est unique, la

somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est dite directe et elle est notée $\oplus E_i = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$. Si $E = \oplus E_i$ on dira que E est somme directe des E_i

Si E est de dimension finie, alors

$$\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_p.$$

Théorème 1.5 Les sous espaces E_1, E_2, \dots, E_p sont en somme directe si et seulement si

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 &= \{0\}, (E_1 \cap E_2) \cap E_3 = \{0\}, \dots \\ (E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{p-1}) \cap E_p &= \{0\} \end{aligned}$$

Exercices

Ex 1 : Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , on note par $E = C(I, \mathbb{R}^3)$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans \mathbb{R}^3 . On pose

$$F = \left\{ \begin{array}{l} f \in E, \forall t \in I, \\ f(t) = \begin{pmatrix} a \exp(-t) + c \exp 2t \\ b \exp(-t) + c \exp 2t \\ -a \exp(-t) + b \exp(-t) + c \exp 2t \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

i) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $C(I, \mathbb{R}^3)$.

ii) Déterminer une base de F et sa dimension.

Ex 2 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $E_1 = \{X(x, y, z) \in E, x = y \text{ et } z = 0\}$, $E_2 = \{X(x, y, z) \in E, z = y \text{ et } x = 0\}$; $E_3 = \{X(x, y, z) \in E, x = 2z \text{ et } y = 3z\}$
A-t-on $E = \oplus E_i$

Ex 3 : Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$\begin{cases} f(e_1) &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= -e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases}$$

où $B = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3

i) Ecrire la matrice M de f dans la base B

ii) Déterminer le noyau et l'image de f , on cherchera une base de chacun d'eux.

iii) Quel est le rang de M .

Soit

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 &= -2e_1 + 2e_2 + e_3 \\ e'_3 &= -2e_1 - e_2 + 4e_3 \end{cases}$$

iv) Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

v) Quelle est la matrice de passage de B à B'

vi) Calculer de deux façons différentes la matrice de f relativement à la base B' .

Ex 4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Déterminer des bases de $Im f$ et de $\ker f$.

ii) Montrer que $Im f$ et $\ker f$ sont des sous espaces supplémentaires

Chapitre 2

Réduction des matrices carrées

2.1 Matrices semblables, trace et valeur propre

Définition 2.1 Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K , soit $f : E \rightarrow F$, on dit que f est linéaire si f vérifie

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) de dimensions finies p et q . Soient $B_E = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $B_F = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ une base de F , et soit f une application linéaire de E à valeurs dans F .

Définition 2.2 On appelle matrice associée à f suivant les bases B_E et B_F la matrice dont les colonnes sont formées par les images des éléments de la base B_E dans la base B_F . Autrement on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1q}f_q \\ f(e_2) = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{2q}f_q \\ \dots \\ f(e_i) = a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + \dots + a_{iq}f_q \\ \dots \\ f(e_p) = a_{p1}f_1 + a_{p2}f_2 + \dots + a_{pq}f_q \end{array} \right.$$

et on la note

$$M = M(f)_{B, B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdot & \cdot & a_{pq} \end{pmatrix}$$

c'est une matrice (q, p)

Dans le cas particulier, où $E = F$, f est appelée endomorphisme de E . L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\ell(E)$.

Exemple 1 On considère dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , la matrice de l'application rotation g autour de l'origine O et d'angle θ . La matrice de g est :

$$\begin{cases} g(e_1) = (\cos \theta) e_1 + (\sin \theta) e_2 \\ g(e_2) = (-\sin \theta) e_1 + (\cos \theta) e_2 \end{cases}$$

$$M(g) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exemple 2 Dans \mathbb{R}^2 , considérons l'endomorphisme h qui représente la Projection sur la première bissectrice, parallèlement à la seconde. tel que

$$h(e_i) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \text{ pour } i = 1, 2$$

$$M(h) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1 Changement de base

Définition 2.3 Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , muni d'une base $B_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, on définit une nouvelle base $B'_E = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E de la façon suivante.

$$e'_k = p_{1k}e_1 + p_{2k}e_2 + \dots + p_{nk}e_n$$

Un changement de base, est donc défini par n^2 scalaires (p_{ij}) . Si $P = (p_{ij})$ est la matrice des p_{ij} , alors P est appelée la matrice de passage de la base B_E à la base B'_E . Pour $k = 1, 2, \dots, n$ la k ème colonne de P contient les composantes de e'_k dans l'ancienne base B_E .

Exemple Si dans \mathbb{R}^2 , $B = (e_1, e_2)$ est la base canonique, on considère la base B' définie par $e'_1 = e_1 - 2e_2$ et $e'_2 = -e_1 - e_2$ alors la matrice de passage est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Voyons quelle est la relation matricielle entre les composantes d'un vecteur dans l'ancienne base et ses composantes dans la nouvelle base de E . Considérons un vecteur V

de E qui s'écrit $V = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ dans la nouvelle base en utilisant l'expression pour les e'_k en fonction des e_i , le vecteur V s'écrit

$$V = \sum_{i,j} x'_j p_{ij} e_i$$

On voit donc que le vecteur X des composantes de V dans la base B_E est simplement $X = PX'$.

Dans ce cas, si la matrice de f dans la base B est notée par A , alors, la matrice de f dans la nouvelle base B' est donnée par

$$M(f)_{B'} = P^{-1}AP.$$

Lemme 2.1 Soit $f \in \ell(E)$, alors on a

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Lemme 2.2 Soient f et $g \in \ell(E)$, alors

$$M(g \circ f, B) = M(g, B) \times M(f, B)$$

Notions de matrices particulières :

Définition 2.4 On appelle matrice diagonale une matrice contenant des termes non nuls que sur la diagonale. On dit qu'une matrice est triangulaire supérieure (resp inférieure), si les termes au dessous (resp au dessus) de la diagonale sont tous nuls.

Matrices semblables

Définition 2.5 Deux matrices A et A' appartenant à $M_n(K)$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$.

On note cette relation $A \simeq A'$. C'est évidemment une relation d'équivalence (vérifier le).

Proposition 2.1 *i) $A \simeq A'$ entraîne $A \sim A'$ et en particulier : $rg(A) = rg(A')$
ii) A et A' sont semblables si, et seulement si, il existe un endomorphisme f de K^n et deux bases B et B' telles que*

$$A = M_B(f) \text{ et } A' = M_{B'}(f)$$

Trace

Définition 2.6 Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. On appelle **trace** de A , le scalaire : $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, la fonction trace est évidemment une forme linéaire sur $M_n(K)$.

Propriétés On a, pour toutes matrices A, B de $M_n(K)$:

i) $Tr(AB) = Tr(BA)$

ii) $Tr({}^tA) = Tr(A)$

iii) $A \simeq A' \implies (TrA = TrB)$

Preuve : Notons $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Le terme générique du produit AB est :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

et donc :

$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ik} = Tr(BA). \end{aligned}$$

L'assertion ii) est triviale et enfin si $A \simeq B$, on peut écrire :

$$B = P^{-1}AP, Tr(P^{-1}(AP)) = Tr((AP)P^{-1}) = trA.$$

Exercice : Montrer que l'on ne peut pas trouver de matrices A et B telles que $AB - BA = I$.

En effet, supposons le résultat vrai, alors $Tr(AB - BA) = Tr(I) = n$, or $Tr(AB - BA) = 0$ impossible

Valeurs propres et vecteurs propres

Dans tout ce qui suit on note par E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K

Définition 2.7 Soit f un endomorphisme de E on dit que $\lambda \in K$ est **valeur propre** de f s'il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$
 x est dit **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ .

Traduction : Soit E un K espace vectoriel rapporté à une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $f \in \ell(E)$ et $A = M_B(f)$:

i) $\lambda \in K$ est valeur propre de f si, et seulement si, $(f - \lambda id_E)$ est non injective, c'est à dire si, et seulement si, $(A - \lambda I_n)$ est non inversible.

Exemple : soit $f(x, y) = (x + y, x - y)$ alors $f(x, y) = \lambda(x, y) \iff \lambda = \pm\sqrt{2}$ et les vecteurs propres sont de la forme :

Pour $\lambda = \sqrt{2}$ on a $(x, y) = (x, (1 - \sqrt{2})x)$ et pour $\lambda = -\sqrt{2}$ les vecteurs propres sont de la forme $(x, (1 + \sqrt{2})x)$ por x quelconque dans \mathbb{R}

Théorème 2.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- i) $\lambda \in K$ est valeur propre de f
- ii) $\ker(f - \lambda e) \neq \{0\}$
- iii) $(f - \lambda e)$ est non bijective
- iv) $(A - \lambda I_n)$ est non inversible
- v) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Démonstration : i) \iff ii) soit λ une valeur propre de $f \iff \exists x \neq 0$ tel que

$$f(x) = \lambda x \iff (f - \lambda e)x = 0 \iff x \in \ker(f - \lambda e) \iff \ker(f - \lambda e) \neq \{0\}$$

ii) \iff iii) il suffit de démontrer que [non ii) \iff non iii)] i. e. $\ker(f - \lambda e) = \{0\} \iff (f - \lambda e)$ est bijective. non ii) $\iff \ker(f - \lambda e) = \{0\} \iff (f - \lambda e)$ est injective $\iff (f - \lambda e)$ est bijective.

iii) \iff iv) on va démontrer que non iii) \iff non iv) Si on a iii) $(f - \lambda e)$ bijective de E dans $E \iff \exists g \in \ell(E)$ tel que

$$(f - \lambda e) \circ g = g \circ (f - \lambda e) = e$$

d'où par le lemme (12) on a

$$M((f - \lambda e) \circ g) = M(g \circ (f - \lambda e)) = M(e)$$

\iff

$$M((f - \lambda e)) M(g) = M(g) M((f - \lambda e)) = I_n.$$

Ainsi $(A - \lambda I)$ est inversible \iff non iv). iv) \iff v), On applique le résultat qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Proposition 2.2 *Soit f un endomorphisme de E et V_1, V_2, \dots, V_m des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ deux à deux distinctes. Alors le système (V_1, V_2, \dots, V_m) est libre.*

Démonstration : On procède par récurrence sur m .

Si $m = 1 \implies \{V_1\}$ est libre.

$m - 1$. On suppose que tout système de vecteurs propres associés à $m - 1$ valeurs propres deux à deux distinctes est libre :

Considérons maintenant la relation

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i V_i = 0 \implies f \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i V_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(V_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i V_i = 0. \quad (2.1.1)$$

En multipliant par λ_m , le premier terme de (10) on obtient

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_m V_i = 0. \quad (2.1.2)$$

En faisant la soustraction (10)-(11) on obtient

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) V_i = 0$$

or

$$\lambda_i - \lambda_m \neq 0 \implies \alpha_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \text{ et } \alpha_m = 0$$

Polynôme caractéristique

Définition 2.8 Soit f un endomorphisme de E et soit M la matrice de f dans une base quelconque. Les valeurs propres sont les racines $\{\lambda_i\}$ de l'équation polynômiale de degré n

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

Le polynôme $\det(M - \lambda I)$ en λ sera noté $P_f(\lambda)$ ou plus simplement $P(\lambda)$; $P_f(\lambda)$ s'appelle le **polynôme caractéristique** et $\det(M - \lambda I) = 0$ est l'équation caractéristique. L'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_i\}$, comptées avec leur multiplicité, s'appelle le spectre de f : $Spf = \{\lambda_i\}$

Les vecteurs propres V_i de f associés à la valeur propre λ_i sont les solutions du système $(M - \lambda_i I)V_i = 0$.

Pour tout i l'ensemble des vecteurs V tels que $MV = \lambda_i V$ est noté $E(\lambda_i)$:

$$E(\lambda_i) = \{V \in E \text{ tel que } MV = \lambda_i V\}.$$

est appelé espace propre associé à la valeur propre λ_i .

Proposition 2.3 $E(\lambda) = \{V \in E \text{ tel que } f(V) = \lambda V\}$ est un sous espace vectoriel de E distinct de $\{0\}$ et qui est stable par f . i.e. $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Preuve : Par définition $E_\lambda \neq \{0\}$. Montrons que E_λ est un sous espace vectoriel de E i.e.

$$f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y) \quad \forall \alpha, \beta \in K \text{ et } \forall x, y \in E_\lambda.$$

or

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

Pour la stabilité, si $x \in E_\lambda$ a-t-on $f(x) \in E_\lambda$?

$$f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) \in E_\lambda,$$

donc E est stable par f .

Proposition 2.4 Deux sous espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Preuve pour la structure d'espace vectoriel elle découle de la linéarité de f il reste à montrer que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$, en effet soit $x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$, on a : $f(x) = \lambda_1 x$ et $f(x) = \lambda_2 x$, soit $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ ce qui implique que $\lambda_1 x - \lambda_2 x = 0$, en d'autres termes $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, soit $x = 0$.

Définition 2.9 Soit $A \in M_n(K)$, $\lambda \in Sp(A)$. L'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de $P(X)$, i.e. l'entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(X - \lambda)^m \text{ divise } P(X) \text{ et } (X - \lambda)^{m+1} \text{ ne divise pas } P(X).$$

Proposition 2.5 Soit $f \in \ell(E)$, $\lambda \in Sp(f)$ d'ordre de multiplicité m , on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m.$$

($\dim E_\lambda$ est appelée multiplicité géométrique de λ .)

Preuve : Soit $k = \dim E_\lambda$. Considérons une base (e_1, e_2, \dots, e_k) de E_λ et complétons la en une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E on a :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_k & B \\ 0 & C \end{pmatrix}_{n-k}^k$$

$$P(X) = \det(M - \lambda I) = \begin{bmatrix} (\lambda - X)I_k & B \\ 0 & C - XI_{n-k} \end{bmatrix}_{n-k}^k$$

et en développant par blocs :

$$P(X) = (\lambda - X)^k Q(X)$$

ce qui, prouve que $(X - \lambda)^k$ divise $P(X)$ et donc que $k \leq m$

Proposition 2.6 Soit f un endomorphisme de E . Le polynôme caractéristique de la matrice M de f est indépendant de la base. Ainsi les valeurs propres sont également indépendantes de la base et l'on pourra parler du "polynôme caractéristique et des valeurs propres de f ".

Preuve : Dans une base donnée on a : $P(\lambda) = \det(M - \lambda I)$. Dans une autre base définie par la matrice de passage P , la matrice de f est $M' = P^{-1}MP$ et l'équation caractéristique $P^*(\lambda)$ est

$$\det(M' - \lambda I) = \det(P^{-1}MP - \lambda I) = \det(P^{-1}MP - \lambda P^{-1}IP) =$$

$$\det(P^{-1}(M - \lambda I)P) = \det(M - \lambda I) = P(\lambda)$$

Soit $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f . Si M est la matrice de f dans une base quelconque alors

$$a_0 = \det M \text{ et } a_{n-1} = (-1)^{n-1} Tr(M)$$

2.2 Diagonalisabilité

Introduction

Dans la première partie on a vu que si f est un endomorphisme dans un espace vectoriel E et est représenté par une matrice M dans une certaine base B de E , alors la matrice de f dans une base B' était $M' = P^{-1}MP$, où P est la matrice de passage de B à B' .

l'idée fondamentale ici est la suivante : partant d'une matrice M dans une base B , est il possible de trouver une nouvelle base B' (et la matrice de passage P) telle que la matrice $M' = P^{-1}MP$ soit d'une certaine forme plus simple, plus agréable à manier que M par exemple une matrice qui n'aurait des termes non nuls que sur la diagonale.

Définition 2.10 *On dit qu'un endomorphisme est diagonalisable, si sa matrice est semblable à une matrice diagonale.*

Théorème 2.2 *Soit $f \in \ell(E)$. f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres.*

Preuve : Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base formée de vecteurs propres $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Alors

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

l'autre implication est évidente par définition .

Théorème 2.3 *Soit $f \in \ell(E)$. f est diagonalisable si et seulement si*

i) $P(\lambda)$ est scindé sur K (i.e. factorisable sur K à l'aide de facteurs du premier degré non nécessairement distincts)

ii) Pour tout $\lambda \in Sp(f)$, d'ordre de multiplicité m , on a : $\dim E_\lambda = m$.

Preuve : Supposons que f est diagonalisable et soit B une base formée de vecteurs propres de f . On peut écrire alors

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

les λ_i ne sont pas nécessairement 2 à 2 distincts

$$P(X) = \det(M - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$$

et $P(X)$ est bien scindé sur K . Soit alors, $\lambda \in Sp(f)$, d'ordre de multiplicité m , λ apparaît m fois dans la diagonale de $M_B(f)$ et il existe m vecteurs propres associés à la valeur propre λ . Ceci montre que $\dim E_\lambda \geq m$, et d'après la proposition (psu) $\dim E_\lambda = m$.

Réciproquement : Supposons les conditions de l'énoncé réalisées,

$$P(X) = \det(M - XI) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} (\lambda_2 - X)^{m_2} \dots (\lambda_k - X)^{m_k}$$

avec

$$\sum_{i=1}^k m_i = n = \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i} = n = \dim E.$$

Comme on sait que les sous espaces propres sont en somme directe, on a donc

$$\sum_{i=1}^k E_{\lambda_i} = E \text{ et } f \text{ est diagonalisable.}$$

Soit $f \in \ell(E)$ admettant n valeurs propres 2 à 2 distinctes, alors f est diagonalisable.

Exemples

1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}).$$

On trouve aisément que

$$P(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$

A est diagonalisable sur \mathbf{C} (deux valeurs propres distinctes), elle ne l'est pas sur \mathbb{R} , car $P(X)$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} .

2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$P(X) = (1 - X)(X^2 - 8X + 16) = (1 - X)(X - 4)^2$$

les valeurs propres sont 4 comme racine double et 1 comme racine simple.

E_4 est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A n'est donc pas diagonalisable

3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

Recherche des valeurs propres

$$P(X) = (X - 1)^3(X + 3)$$

$\dim E_1 = 3$ et $\dim E_{-3} = 1$ A est diagonalisable On peut prendre comme matrice de passage la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonale.

Exercices

Ex 1 Soit $E = \left\{ \sum_{n=0}^2 a_n \cos nt, \text{ où } a_n \text{ sont des nombres réels} \right\}$.

i) Montrer que $(1, \cos t, \cos 2t)$ est une base de E .

ii) Soit $T : E \rightarrow E$ définie par $T\left(\sum_{n=0}^2 a_n \cos nt\right) = \sum_{n=0}^2 n^2 a_n \cos nt$

déterminer les valeurs propres de T ainsi que les vecteurs propres associés.

iii) Montrer que $T(f) = -\frac{d^2}{dt^2}f$.

iv) Déterminer S tel que $T^2 = S$.

Ex 2 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $f : E \rightarrow E$ définie par $f(P) = P + P' + P''$

i) Montrer que $f \in \ell(E)$ et que f est bijective.

ii) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$, puis déterminer A^{-1} .

iii) Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre, quelle est elle? Déterminer les vecteurs propres correspondants, A est elle diagonalisable?

iv) Trouver B telle que $A^2 = B$.

Ex 3 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Déterminer le polynôme caractéristique de A les valeurs propres et les vecteurs propres

ii) Caractériser les espaces propres.

Ex 4 : Pour n réels $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ quelconques, on considère la matrice carrée d'ordre $n + 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdot & \cdot & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdot & \cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Montrer que $-a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_n$ sont des valeurs propres de A .
- ii) Quelle est la dernière valeur propre de A ?
- iii) Calculer le déterminant de A .
- iv) Déduire de ce problème une méthode simple pour construire une matrice diagonalisable non diagonale dont on se donne a priori des valeurs propres qui sont distinctes et différentes de l'opposé de leur somme.

Ex 5 : Soit A une matrice carrée dont le rang est 1

- i) Que peut on dire sur le spectre de A (ensemble de ses valeurs propres) ?
- ii) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $TrA \neq 0$.

Ex 6 : Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie, et soit $f \in \ell(E)$, on suppose que f n'a aucune valeur propre.

- i) Montrer que $\dim E$ est un nombre pair.
- ii) Montrer que tout sous espace stable par f est de dimension un nombre pair.
- iii) On suppose dans cette question que, $f^2 = -id_E$; montrer que $\dim E$ est un nombre pair, et déterminer le polynome caractéristique de f .

Ex 7 : Soit m un paramètre réel, et soit A la matrice à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 3m + 1 & m - 1 & -m + 1 \\ 4m - 2 & 2 & 0 \\ 3m - 1 & -3m + 1 & 3m + 1 \end{pmatrix}$$

- i) Pour quelles valeurs de m , A admet des valeurs propres doubles.
- ii) Calculer $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- iii) Pour quelles valeurs de m , A est diagonalisable (resp. trigonalisable)

Applications : Puissances d'une matrice diagonalisable

Soit $M \in M_n(K)$ une matrice diagonalisable, il existe alors un élément inversible P tel que

$$D = P^{-1}MP$$

soit diagonale. On a

$$M = PDP^{-1}$$

Désignons par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ les éléments diagonaux, distincts ou confondus, de D , on écrit

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad M^q = PD^qP^{-1}$$

or

$$D^q = \text{diag}(\lambda_1^q, \lambda_2^q, \dots, \lambda_n^q)$$

L'expression de M^q ($q > 0$), s'en déduit

$$q = 0 \quad M^0 = D^0 = I_n.$$

Les matrices semblables M et D sont inversibles si et seulement si aucun des λ_i n'est nul

$$M^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

$$D^{-1} = (\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}).$$

Exponentielle d'une matrice

Soit A une matrice carrée, on appelle l'exponentielle de A la matrice définie par

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Théorème 2.4 *Si A et B commutent, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.*

Preuve : d'une part on a :

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A + B)^n}{n!} &&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} C_n^k A^k B^{n-k} &&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{n!} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

d'autre part

$$\exp(A) \exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}$$

d'où l'égalité désirée

Exercices :

1) Calculer $\exp I$, $\exp \lambda I$, $\lambda \in \mathbf{C}$, et démontrer que pour tout $M \in M_n(\mathbf{C})$, $\exp M$ est inversible et déterminer son inverse.

2) On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(A) \exp(B)$, $\exp(A + B)$, $\exp(A) \exp(B)$ et $\exp(B) \exp(A)$ que peut on conclure?.

3) Soit $M \in M_n(\mathbf{C})$

i) Montrer que si x est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ alors x est vecteur propre de $\exp(M)$ associé à la valeur propre $\exp \lambda$.

ii) Montrer que

$$Sp(\exp(A)) = \{\exp \lambda, \lambda \in Sp(A)\}.$$

iii) En déduire que

$$\det \exp(M) = \exp(\text{Tr} M).$$

Corrigé de 3 ii) On sait que $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ ainsi si $\lambda \in Sp(A)$: ie. il existe un vecteur non nul x tel que $Ax = \lambda x$ d'où $A^n x = A^{n-1}(Ax) = \lambda A^{n-1}x = \lambda^n x$ soit

$$\exp(A)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x = \exp \lambda x$$

Soit $\exp \lambda \in Sp(\exp(A))$

Inversement On sait d'après le théorème T302 qu'il existe deux matrices D diagonale et N nilpotente et une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D + N$ avec $DN = ND$ et D est définie par $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Sp(A)$

D'où $A = P(D + N)P^{-1}$ et

$$\exp(A) = \exp P(D + N)P^{-1} = P \exp(D + N)P^{-1} = P(\exp D \exp N)P^{-1}$$

Comme N est nilpotente alors $\exp N = I + \sum_{k=0}^p \frac{N^k}{k!}$ et par suite $\exp D \exp N = \exp D + J$ où J est une matrice nilpotente, par conséquent

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A)P = \exp D + J$$

Soit si $\alpha \in Sp(\exp(A))$ alors il existe $\lambda \in Sp(A)$ telle que $\alpha = \exp \lambda$ d'où ce qu'il fallait démontrer

2.3 Trigonalisation

Définition 2.11 Soit $f \in \ell(E)$ on dit que f est trigonalisable, si sa matrice est semblable à une matrice triangulaire.

Définition 2.12 On dit qu'un polynôme $P(X)$ de degré n dans un corps K est scindé, si P admet n racines en comptant leurs multiplicités. Cela signifie que $P(X)$ peut s'écrire

$$P(X) = \alpha \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i),$$

où α est le coefficient du terme du plus haut degré.

Exemple $P(X) = X^2 + 1$ est scindé sur \mathbf{C} , mais ne l'est pas sur \mathbb{R}

Théorème 2.5 Soit $f \in \ell(E)$ f est trigonalisable, si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur K .

Preuve : soit $f \in \ell(E)$ et supposons que f est trigonalisable. Il existe une base B de E telle que

$$M = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \cdot & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

et alors

$$P(X) = \det(M - XI) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

(Car le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de la diagonale) qui est bien scindé sur K .

Démontrons la réciproque par récurrence sur n , le résultat étant trivial pour $n = 1$ (ou même pour $n = 0$ |) Supposons donc le résultat vrai à un certain rang $n - 1 > 1$ et considérons E de dimension n , $f \in \ell(E)$ tel que son polynôme caractéristique soit scindé sur K . Soit λ une racine sur K de $P(X)$ (il en existe) et e_1 un vecteur propre associé. Complétons pour obtenir une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , on a :

$$M = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \cdot & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$P(X) = \det(M - XI_n) = (X - \lambda) \det(B - XI_{n-1}).$$

Comme P est scindé sur K , Alors $\det(B - XI_{n-1})$ est également scindé et d'après l'hypothèse de récurrence il existe $Q \in GL_{n-1}(K)$ telle que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure. Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

P est évidemment inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs donne alors :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & Q^{-1}BQ \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure, ce qui prouve que f est trigonalisable et achève la démonstration.

Remarque 1 : A est semblable à une matrice triangulaire inférieure si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 2 : Tout endomorphisme est trigonalisable sur \mathbf{C} . Car \mathbf{C} est algébriquement clos (tout polynôme de degré n admet n racines distinctes ou confondues dans \mathbf{C}).

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 14 & -1 & -1 \\ -8 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'endomorphisme f dont le polynôme caractéristique

$$P(X) = -(X + 3)(X - 2)^2$$

et qui est non diagonalisable, le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} donc on peut trigonaliser dans \mathbb{R} . On cherche une base (u_1, u_2, u_3) dans laquelle la matrice est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} -3 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

avec a, b, c à trouver cela veut dire que

$$\begin{cases} f(u_1) &= -3u_1 \\ f(u_2) &= au_1 + 2u_2 \\ f(u_3) &= bu_1 + cu_2 + 2u_3 \end{cases}$$

$$a = 0, b = 5, c = 1$$

La matrice de passage est donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie bien que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique

Soit E un K espace vectoriel de dimension n , $f \in \ell(E)$ f trigonalisable, soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E telle que $M(f)_B$ soit triangulaire supérieure

$\forall k \in [1, n] f(e_k) \in Vect(e_1, e_2, \dots, e_k)$

$k \in [1, n] G_k = Vect(e_1, e_2, \dots, e_k)$

i) $k \in [1, n] \dim G_k = k$

ii) $k \in [1, n-1] G_k \subset G_{k+1}$

iii) $k \in [1, n] f(G_k) \subset G_k$

Réciproquement soit $f \in \ell(E)$ et supposons l'existence d'une famille (G_1, G_2, \dots, G_n) de sous espaces vectoriels de E vérifiant i) ii) et iii). Soit alors $e_1 \neq 0 \in G_1$ et pour $k \in [2, n]$ e_k un vecteur de $G_k \setminus G_{k-1}$ la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) est clairement une base de E et $M(f)_B$ est triangulaire supérieure.

Définition 2.13 Un corps K est dit algébriquement clos si tout polynôme de degré n à coefficients dans K admet n racines distinctes ou confondues dans K .

Théorème de Cayley Hamilton

polynômes d'Endomorphismes ou de Matrices

Soit f un endomorphisme d'un K -espace vectoriel E (a priori quelconque)

et

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \in K[X].$$

On pose

$$P(f) = a_0e + a_1f + a_2f^2 + \dots + a_nf^n \in \ell(E).$$

de même si A est une matrice, on pose

$$P(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n \in M_n(K)$$

et on a

$$(P + \alpha Q)(f) = P(f) + \alpha Q(f)$$

$$PQ(f) = P(f) \circ Q(f)$$

De plus si $x \in E$ telle que $f(x) = \lambda x$ alors ;

$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

Polynomes Annulateurs

Définition 2.14 Soit $f \in \ell(E)$ et soit $P \in K[X]$, on dit que P est annulateur de f si $P(f) = 0$ (on dit aussi que f annule P)

Exemple soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$, soit $A^2 + I = 0$, donc A annule le polynome $P(X) = X^2 + 1$

Définition 2.15 Soit $f \in \ell(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que P est polynôme minimal de f si $P(f) = 0$ et P est de degré minimal.

Exemple Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et soit $f \in \ell(E)$ vérifiant la relation $f^2 = -Id$.

1) Quel est le polynôme minimal de f ?

Il est facile de voir que f annule le polynôme $X^2 + 1$, et qui est donc son polynôme minimal

Théorème 2.6 $f \in \ell(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et n'admet que des racines simples.

Théorème 2.7 Décomposition des Noyaux : Soit E un K espace vectoriel, $f \in \ell(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ étrangers alors on a :

$$\ker(PQ(f)) = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f))$$

Preuve : Soit $x \in \ker P(f)$, on a : $P(f)(x) = 0$ et par conséquent :

$$PQ(f)(x) = QP(f)(x) = Q(f) \circ P(f)(x) = 0.$$

Ce qui prouve que $\ker(P(f)) \subset \ker(PQ(f))$. On a de même $\ker(Q(f)) \subset \ker(PQ(f))$, et comme $\ker(PQ(f))$ est un sous espace vectoriel de E , on a, a fortiori :

$$\ker(P(f)) + \ker(Q(f)) \subset \ker(PQ(f)).$$

P et Q étant étrangers, l'identité de Bezout montre qu'il existe des polynômes A et B tels que $AP + BQ = 1$, i.e :

$$[A(f) \circ P(f) + B(f) \circ Q(f)](x) = x \quad (2.3.1)$$

Posons

$$y = A(f) \circ P(f)(x), z = B(f) \circ Q(f)(x)$$

et supposons que $x \in \ker(PQ(f))$. On a alors

$$Q(f)(y) = Q(f) \circ A(f) \circ P(f)(x) = A(f) \circ PQ(f)(x) = A(f)(0) = 0$$

c'est à dire : $y \in \ker(Q(f))$. On obtient de même $z \in \ker(P(f))$ et donc puisque $x = y + z$:

$$\ker(PQ(f)) \subset \ker(P(f)) + \ker(Q(f))$$

d'où

$$\ker(P(f)) + \ker(Q(f)) = \ker(PQ(f)).$$

Enfin, soit

$$x \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)).$$

la relation (*), appliquée à ce vecteur x montre que $x = 0$ et la somme est bien directe.

Théorème 2.8 -de Cayley-Hamilton : Soit E un K -espace vectoriel de dimension n , $f \in \ell(E)$, P son polynôme caractéristique : on a : $P(f) = 0 \in \ell(E)$.

Preuve : Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1 er cas : K est algébriquement clos (usuellement $K = \mathbf{C}$).

soit $f \in \ell(E)$, f est trigonalisable et il existe une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que

$$M = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \cdot & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'où

$$P(X) = \det(M - XI) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

et

$$P(f) = (\lambda_1 id - f) \circ (\lambda_2 id - f) \circ \dots \circ (\lambda_n id - f).$$

Pour $k \in [1, n]$ posons

$$G_k = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) \text{ et } v_k = \lambda_k id - f.$$

les sous espaces G_k sont stables par f et $G_n = E$. On a : $v_n(e_n) \in G_{n-1}$ (La coordonnée sur e_n disparaît) et $\forall k < n$, $v_n(e_k) \in G_{n-1}$ par stabilité de G_{n-1} , d'où

$$\widehat{v}_n(G_n) \subset G_{n-1}.$$

De même : $v_{n-1}(e_{n-1}) \in G_{n-2}$ (La coordonnée sur e_{n-1} disparaît) et $\forall k < n - 1$, $v_{n-1}(e_k) \in G_{n-2}$ par stabilité de G_{n-2} , d'où

$$v_{n-1}(G_{n-1}) \subset G_{n-2}.$$

et donc $\widehat{v_{n-1} \circ v_n}(G_n) \subset G_{n-2}$.

On poursuit ainsi, on trouve

$$v_2 \circ \dots \circ \widehat{v_{n-1}} \circ v_n.(G_n) \subset G_1$$

et comme $v_1(e_1) = 0$, il vient bien $\widehat{P(f)}(E) = \{0\}$ i.e. $P(f) = 0$.

2ème cas : K n'est pas algébriquement clos (usuellement $K = \mathbb{R}$ ou \mathbf{Q}). On considère la fermeture de K et on procède comme dans le cas précédent (car le changement du corps de base n'affecte pas les calculs).

Remarque Le polynome minimal divise le polynome caractéristique.

Exercices

1) Soit E un K espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $A \in M_n(K)$, montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, alors $A^p \in \text{vect} \{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ecrire A^p en fonction de I , A et A^2

2) Soit :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -15 & 18 \\ -5 & -12 & 14 \\ -6 & -14 & 17 \end{pmatrix}$$

Déterminer son polynôme caractéristique P_A , ainsi que le reste de la division euclidienne de X^n ($n \in \mathbb{N}^*$) par P_A . En déduire l'expression de A^n en fonction de n ainsi que $\exp A$.

3) Procéder de même avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & -2 & -9 \\ 1 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4) Soit $A \in M_n(K)$ de rang r , montrer qu'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à $r + 1$, tel que $P(A) = 0$.

(Utiliser une matrice semblable à A de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix},$$

où A_1 est carrée d'ordre r et considérer le polynôme $X.P_{A_1}$).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est

$$\det(A - XI) = \begin{vmatrix} 2 - X & -1 & -1 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & 1 & 2 - X \end{vmatrix} = 2 - 5X + 4X^2 - X^3.$$

En substituant A , on trouve

$$\begin{aligned}
 2I - 5A + 4A^2 - A^3 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 16 & -12 & -12 \\ 12 & -8 & -12 \\ -12 & 12 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & -7 & -7 \\ 7 & -6 & -7 \\ -7 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$2I = 5A - 4A^2 + A^3 = A(5I - 4A + A^2).$$

Ce qui donne

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(5I - 4A + A^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.1 Sous espaces caractéristiques

Définition 2.16 Soit E un C -espace vectoriel de dimension n (plus généralement un K -espace vectoriel de dimension n de corps K étant algébriquement clos) $f \in \ell(E)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de f d'ordres de multiplicités respectifs $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ on pose

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Le sous espace

$$C_{(\lambda_i)} = \ker [(f - \lambda_i \text{id})^{m_i}]$$

est appelé **sous espace caractéristique** associé à la valeur propre λ_i

Proposition 2.7 i) $\forall i \in [1, k], E(\lambda_i) \subset C_{(\lambda_i)}$

ii) $\forall i \in [1, k], f(C_{(\lambda_i)}) \subset C_{(\lambda_i)}$

iii) $E = \bigoplus_{i=1}^k C_{(\lambda_i)}$.

Preuve i) et ii) sont évidents

iii) Les polynômes $(X - \lambda_i)$, pour $i = 1, 2, \dots, k$ sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton impliquent que

$$E = \ker P_f(f) = \bigoplus_{i=1}^k \ker [(f - \lambda_i \text{id})^{m_i}] = \bigoplus_{i=1}^k C_{(\lambda_i)}.$$

Remarque : A est diagonalisable si et seulement si

$$C_{(\lambda_i)} = E_{(\lambda_i)}$$

Théorème 2.9 Soit $A \in M_n(C)$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ alors, A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_k \end{pmatrix}$$

où chaque bloc T_i est trigonale sup de la forme

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & * \\ 0 & \lambda_i & * \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Preuve posons $f_i = f|_{C_{(\lambda_i)}}$ donc $(f_i - \lambda_i \text{id}_{C_{(\lambda_i)}})^{m_i}$ est l'endomorphisme nul sur $C_{(\lambda_i)}$, donc $(X - \lambda_i)^{m_i}$ annule f_i f_i admet λ_i pour valeur propre. Soit B_i une base de $C_{(\lambda_i)}$ trigonalisant f_i alors $B = \cup B_i$ est une base répondant à la question.

Définition 2.17 f un endomorphisme de E est dit nilpotent, s'il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $f^m = 0$.

Définition 2.18 On appelle degré de nilpotence d'un endomorphisme f , le plus petit entier m tel que $f^m = 0$.

Théorème 2.10 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , $f \in \ell(E)$, il existe un endomorphisme diagonalisable, et un endomorphisme n nilpotent, uniques tels que $f = d + n$ et $n \circ d = d \circ n$

Exercices

Ex 1 Soient $A \in M_{p,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$ avec $n \geq p$.

i) Montrer que dans $M_{n+p}(K)$:

$$\begin{pmatrix} XI_n - BA & B \\ 0_{p,n} & XI_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ A & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n & B \\ 0_{p,n} & XI_p - AB \end{pmatrix}$$

ii) Quelle conclusion en tire-t-on pour les polynômes caractéristiques de AB et BA ? étudier le cas où $n = p$ ($0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $M_{n,p}(K)$).

Ex 2 : Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, en effectuant la division euclidienne de X^n par le polynôme caractéristique de A

Ex 3 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ associée à un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 .

i) Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres, ses sous espaces caractéristiques.

ii) Déterminer une base de \mathbb{R}^3 , dans laquelle la matrice de f est triangulaire avec cinq coefficients nuls.

Ex 4 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Pour tout réel t on définit $G(t)$ par

$$G(t) = \exp(-tA) \exp(-tB) \exp(-t(A + B)).$$

a) Calculer $G'(0)$, $G''(0)$. (Rappel $\frac{d}{dt} \exp(tA) = (\exp(tA)) A$)

b) En déduire que si pour tout t , $\exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A + B))$ alors A et B commutent.

Ex 5 : Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension finie n .

a) Ecrire l'expression de la trace de f en fonction de ses valeurs propres.

b) Montrer que si f est nilpotente, alors $\forall k, 1 \leq k \leq n, \text{Tr}(f^k) = 0$. (où Tr désigne la trace)

c) Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension finie n . On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $f \circ g - g \circ f = kf$.

Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, que $f^m \circ g - g \circ f^m = mkf^m$, en déduire que f est nilpotente (On utilise le résultat suivant : f est nilpotente si et seulement si $\forall k, 1 \leq k \leq n, \text{Tr}(f^k) = 0$).

2.4 Réduite de Jordan

Nous proposons ici un ultime raffinement de la théorie de la réduction des matrices complexes, en montrant que l'on peut encore améliorer la forme obtenue du théorème en plaçant un bon nombre de zéros au dessus de la diagonale de chaque bloc T_i . La clé de cette étude réside dans le lemme très technique suivant :

Lemme 2.3 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme nil-

potent de E , alors, il existe une base B de E telle que l'on ait :

$$M = M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec : $\forall i, \varepsilon_i = 0$ ou $\varepsilon_i = 1$

Preuve :

Soit p l'indice de nilpotence de f (c'est à dire le plus petit entier i tel que $f^i = 0$) et pour $k \in [1, n]$, posons $N_k = \ker f^k$ (donc $N_p = E$ et on peut poser $N_0 = \{0\}$).

On sait que l'on a :

$$N_0 \subset N_1 \subset . \subset . \subset N_p = E.$$

pour $k \in [1, p-1]$, soit Y_k un supplémentaire de N_k dans N_{k+1} :

$$N_k \oplus Y_k = N_{k+1}.$$

Alors :

i) La restriction de f à Y_k est injective.

En effet :

$$\ker f \cap Y_k = N_1 \cap Y_k \subset N_k \cap Y_k = \{0\}.$$

ii) $f(Y_k) \subset N_k$. En effet : soit $x \in f(Y_k)$, on peut écrire $x = f(y)$, avec $y \in Y_k \subset N_{k+1}$, d'où

$$f^k(x) = f^{k+1}(y) = 0, \text{ soit : } x \in N_k.$$

iii) $f(Y_k) \cap N_{k-1} = \{0\}$. En effet : soit $x \in f(Y_k) \cap N_{k-1}$, on peut écrire $x = f(y)$, avec $y \in Y_k$ et :

$$f^{k-1}(x) = f^k(y) = 0 \text{ soit } y \in N_k, \text{ d'où } y \in Y_k \cap N_k = \{0\}, \text{ et } x = f(0) = 0.$$

Ainsi l'image par f d'une base de Y_k est une base de $f(Y_k)$ que l'on peut compléter en une base d'un supplémentaire Y_{k-1} de N_{k-1} dans N_k .

Partons alors d'un supplémentaire Y_{p-1} de N_{p-1} dans $N_p = E$ et procédons comme ci-dessus jusqu'à obtenir un supplémentaire Y_1 de $\ker f = N_1$ dans N_2 . On a :

$$E = \ker f \oplus Y_1 \oplus . \oplus . \oplus Y_{p-1},$$

et il n'y a plus qu'à numéroter les vecteurs des bases utilisées de façon adéquate :

Soit e_p un vecteur de base Y_{p-1} ,

$$e_{p-1} = f(e_p) \in Y_{p-2}, \dots, e_2 = f(e_k) \in Y_1, e_1 = f(e_2) \in \ker f,$$

puis soit e_{2p} un autre vecteur de base de Y_{p-1} , $e_{2p-1} = f(e_{2p})$jusqu'à épuiser la base de Y_{p-1} . Comme $\dim Y_{p-2} \geq \dim Y_{p-1}$, on réamorçe le processus en partant d'un vecteur de base de Y_{p-2} non encore utilisé....Au fur et à mesure la chaîne se raccourcit et les derniers vecteurs utilisés forment une base d'un supplémentaire de $f(Y_1)$ dans $\ker f$.

Finalement, dans la base ainsi construite, l'image de chaque vecteur e_i est : soit le vecteur nul (si l'on est dans $\ker f$), soit le vecteur e_{i-1} (si l'on est dans l'un des espaces Y_k) et $M_B(f)$ a bien la forme attendue.

Théorème 2.11 *de Jordan* : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ le spectre de A , A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & T_p \end{pmatrix},$$

où chaque bloc diagonal T_i est de la forme

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & 0 \\ 0 & \lambda_i & * \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

les coefficients astérisqués valent 0 ou 1.

Preuve :

soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A et notons f_i la restriction de f au sous espace caractéristique C_{λ_i} (qui est stable). On a : $(f_i - \lambda_i id)^{m_i} = 0$ donc $(f_i - \lambda_i id)$ est nilpotent et il existe une base B_i de C_{λ_i} où cet endomorphisme se traduit par une matrice de la forme du lemme précédent, la matrice de $(\lambda_i - id)$ étant scalaire, il vient :

$$M_{B_i}(f_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & 0 \\ 0 & \lambda_i & * \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \text{ les coefficients astérisqués valent 0 ou 1.}$$

Comme $\bigoplus_{i=1}^p C_{\lambda_i} = E = \mathbb{C}^n$, la famille $B = (B_1, \dots, B_p)$ est une base de E et $M_B(f)$ a la forme voulue.

Exemple Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^6 dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, \dots, e_6)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en écrivant les images successives des vecteurs de base, on s'aperçoit facilement que :

$$\ker f = \text{Vect}(e_1, e_2, e_4 - e_3) \text{ et } \dim \ker f = 3$$

$$\ker f^2 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_6 - e_5) \text{ et } \dim \ker f^2 = 5$$

$$\ker f^3 = \mathbb{R}^6$$

Posons alors

$$e'_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^6 \setminus \ker f^2$$

$$e'_2 = f(e'_3) = (0, 1, 0, 1, 0, 0) \in \ker f^2 \setminus \ker f$$

$$e'_1 = f(e'_2) = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \in \ker f.$$

Prenons ensuite

$$e'_5 = (0, 0, 0, 0, -1, 1)$$

(e'_2, e'_5) est alors une base d'un supplémentaire de $\ker f$ dans $\ker f^2$.

$$e'_4 = f(e'_5) = (0, 1, -1, 1, 0, 0) \in \ker f.$$

Prenons enfin

$$e'_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$((e'_1, e'_4, e'_6))$ est alors une base de $\ker f$.

$B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_6)$ est une base de \mathbb{R}^6 et dans cette base, on a :

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Systèmes d'Equations Différentielles

3.1 Généralités

Définition 3.1 : On appelle système d'équations différentielles linéaires d'ordre n , un système de n équations différentielles linéaires du premier ordre à n inconnues $x_1(t), \dots, x_n(t)$, et qui est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{array} \right. , \quad (3.1.1)$$

où a_{ij} et b_i sont des fonctions définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Ecriture matricielle

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(t) = (a_{ij}(t)) \in M_n(\mathbb{R}).$$

Le système (s) devient alors,

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X + B(t) \quad (3.1.2)$$

Résoudre (s1) équivaut à chercher l'ensemble des fonctions vectorielles $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables et satisfaisant (s1).

Définition 3.2 On appelle système homogène associé à (s1) le système

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X \quad (3.1.3)$$

Exemples 1) Il est facile de voir

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \exp 3t \\ \exp 3t \end{pmatrix} \text{ et } X_2(t) = \begin{pmatrix} \exp 2t \\ \exp 2t \end{pmatrix}$$

sont des solutions du système suivant sur tout \mathbb{R} .

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X, \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \exp 4t \\ 3 \exp 4t \end{pmatrix} \text{ et } X_2(t) = \begin{pmatrix} \exp 2t \\ \exp 2t \end{pmatrix}$$

sont solutions du système suivant sur tout \mathbb{R} .

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X, \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $X(t) = \begin{pmatrix} 3t - 2 \\ -2t + 3 \end{pmatrix}$ est une solution particulière du système linéaire avec second membre suivant

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X + B(t), \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} t - 1 \\ -5t - 2 \end{pmatrix}.$$

3.2 Propriétés

Existence et unicité de la solution

Théorème 3.1 de Cauchy : Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} $A(t) = A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ et $B(t) = (b_i) \in M_{n,1}(K)$ deux fonctions vectorielles continues sur I , soit $t_0 \in I$ et $X_0 \in K^n$. Alors il existe une solution unique du système (s1) vérifiant $X(t_0) = X_0$.

Définition 3.3 On dit que X est une **solution particulière** satisfaisant la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

Lien entre les solutions de (2.2) et (2.3)

Théorème 3.2 *La solution générale X de (s1) est la somme de la solution générale X_h de (sh) et d'une solution particulière X_p de (s1).*

Preuve : similaire à celle vue en PC1.

Résolution du système homogène

Théorème 3.3 *L'ensemble des solutions \mathfrak{S} de (sh) est un espace vectoriel de dimension n sur K .*

Preuve : Soit $C(I, K^n)$, l'espace des fonctions continues de I à valeurs dans K^n .

Propriété d'espace vectoriel évidente

Cherchons maintenant une base de \mathfrak{S} Soit $t_0 \in I$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de K^n .

D'après le théorème (ca) il existe une solution unique x_i de (sh) qui satisfait la condition $x_i(t_0) = e_i$. Montrons que le système $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de \mathfrak{S} . Considérons un élément quelconque X de \mathfrak{S} . Cet élément vérifie $X(t_0) = X_0$. Or $\exists (\alpha_i) \in K^n$ tel que

$$X_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Soit

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

\mathfrak{S} est un espace vectoriel donc y est un élément de \mathfrak{S} . De plus on a :

$$y(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t_0) = X_0$$

Donc $y \equiv X$ à cause de l'unicité. Alors

$$X = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

c'est à dire que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une partie génératrice de \mathfrak{S} . Est elle libre ?

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t_0) = 0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \implies \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

CQFD.

Définition 3.4 *On appelle système fondamental de solutions de (sh) toute base de l'espace des solutions \mathfrak{S} de (sh).*

Théorème 3.4 Une condition nécessaire et suffisante pour que $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathfrak{S}$ soit un système fondamental de solutions de (sh), est qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $(x_i(t_0))_{1 \leq i \leq n}$ soit une base de K^n .

Exemple

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1(t) \end{cases} \iff \left(\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X, \text{ où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \quad (3.2.1)$$

Le système

$$\left(X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, X_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \right)$$

est un système fondamental de (s2). En effet pour $t = 0$ on a :

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

qui est bien un vecteur libre dans \mathbb{R}^2 .

3.3 Résolution par application de la réduction des matrices

Systemes à coefficients constants

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX + B \quad (3.3.1)$$

1er cas : Si A est diagonalisable

Dans ce cas, il existe une matrice inversible P telle

$$D = P^{-1}AP$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

En effectuant le changement de fonction

$$X = PY.$$

Le système (s3) devient

$$\frac{dY}{dt}(t) = DY + P^{-1}B.$$

On résoud d'abord

$$\frac{dY}{dt}(t) = DY = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)Y \iff \frac{dy_i}{dt}(t) = \lambda_i y_i.$$

Dont la solution est

$$y_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t), \text{ avec } c_i \in K$$

Pour la résolution de l'équation complète on utilise la méthode des variations des constantes.

2ème cas Si A est trigonalisable

Dans ce cas, il existe une matrice inversible P telle

$$T = P^{-1}AP$$

avec T une matrice triangulaire

$$T = (a_{ij}) \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i < j.$$

En effectuant le changement de fonction

$$X = PY.$$

Le système (s3) devient

$$\frac{dY}{dt}(t) = TY + P^{-1}B.$$

On résoud d'abord

$$\frac{dY}{dt}(t) = TY \iff \frac{dy_i}{dt}(t) = \sum_{j=i}^n a_{ij} y_j.$$

$$\frac{dy_n}{dt}(t) = a_{nn} y_n, \text{ dont la solution générale est } y_n(t) = \alpha_n \exp(\lambda_n t), \text{ avec } \alpha_n \in K$$

On résoud le système régressivement comme des systèmes linéaires du premier ordre avec second membre.

Exemple

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X, \text{ où } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y \\ \frac{dy}{dt} = -y - z \\ \frac{dz}{dt} = -z \end{cases}$$

Soit

$$z = \alpha \exp(-t), \quad y(t) = (-\alpha t + \beta) \exp(-t), \quad x(t) = \left(\frac{-\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma\right) \exp(-t)$$

avec α, β , et γ sont des constantes réelles. Ainsi

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha \exp(-t) \\ (-\alpha t + \beta) \exp(-t) \\ \left(\frac{-\alpha}{2}t^2 + \beta t + \gamma\right) \exp(-t) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général, la matrice A admet une réduite de Jordan et le principe est le même.

Exemple

$$\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$$

En jordanisant la matrice A , on obtient $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

en posant $X = PY$, Y est solution du système

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}(t) = y_1 \\ \frac{dy_2}{dt}(t) = 2y_2 + y_3 \\ \frac{dy_3}{dt}(t) = 2y_3 + y_4 \\ \frac{dy_4}{dt}(t) = 2y_4 \end{cases}$$

On obtient

$$y_1 = \alpha_1 \exp t, \quad y_4 = \alpha_4 \exp 2t$$

Pour

$$\frac{dy_3}{dt}(t) = 2y_3 + y_4 = 2y_3 + \alpha_4 \exp 2t$$

dont la solution de l'équation homogène est $\alpha_3 \exp 2t$ pour une solution particulière nous procédons par la méthode de la variation de la constante et on obtient

$$y_3 = \alpha_3 \exp 2t + \alpha_4 t \exp 2t = (\alpha_3 + \alpha_4 t) \exp 2t.$$

De même on obtient

$$y_2 = \left(\alpha_2 + \alpha_3 t + \frac{\alpha_4}{2} t^2 \right) \exp 2t.$$

Et finalement, on calcule $X = PY$. Pour obtenir la solution générale de (s8).

1) On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x - y - 5z \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y + z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y - z \end{cases} \iff \frac{dX}{dt} = AX \quad (3.3.3)$$

1) Calculer les valeurs propres de A , Trouver la réduite de Jordan de A

2) Déterminer la solution générale de (s0), puis la solution vérifiant $X(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

3) On désigne par I la matrice unité et on pose $B = A - 4I$, calculer B^n , $\exp Bt$, $\exp At$, en déduire l'expression de la solution X tel que $X(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

II) On considère le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y + z + t \exp(-t) \\ \frac{dy}{dt} = x - y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y - z \end{cases} \iff \frac{dX}{dt} = AX + B(t) \quad (3.3.4)$$

- 1) Déterminer la solution générale du système homogène.
- 2) Déterminer une solution particulière du système (h0), puis la solution de ce système en prenant pour $t = 0$ les valeurs 1, -3 et 1.

3.4 Equation Différentielle linéaire d'ordre n

Définition 3.5 Une équation différentielle linéaire d'ordre n , est une équation de la forme

$$\frac{d^n x}{dt^n}(t) = a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + b(t) \quad (3.4.1)$$

où les $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ sont appelés les coefficients de l'équation et $b(t)$ est appelé second membre de l'équation (E).

3.4.1 Méthode de résolution

Considérons la matrice colonne, pour $t \in \mathbb{R}$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \end{pmatrix},$$

on montre que l'équation (E) est équivalente au système

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX + B \quad (3.4.2)$$

où la matrice est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

On procède alors de la même façon que dans le cas de la situation précédente.

Exercices :

Ex 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)

$$\frac{d^3x}{dt^3}(t) + 2x - \frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

b)

$$\frac{d^3x}{dt^3}(t) - x - \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

c)

$$\frac{d^3x}{dt^3}(t) + x + 3\frac{dx}{dt} + 3\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

Ex 2 Soit le système différentiel

$$\frac{dX}{dt}(t) = AX + B \tag{3.4.3}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \exp 2t \\ -\exp -2t & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp t \end{pmatrix}.$$

On effectue le changement de fonction inconnue

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \exp -t & 0 \\ 0 & \exp t \end{pmatrix} X(t)$$

a) Montrer que la fonction $t \rightarrow X(t)$ est solution de l'équation (30) si $t \rightarrow Y(t)$ est solution du système

$$\frac{dX}{dt}(t) = A_1X + B_1 \tag{3.4.4}$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp 2t \end{pmatrix}$$

b) En déduire la solution générale du système (30).

Ex 3 : On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer en fonction de a, b, c le polynôme minimal de A et en déduire l'ensemble $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } A \text{ est diagonalisable}\}$.

b) Déterminer une réduite de Jordan de A .

Ex 4 : Soit dans $M_5(\mathbb{R})$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

associée à un endomorphisme f .

On suppose que $P_A(X) = (1 - X)^3(2 - X)^2$ et on pose $C_1 = \ker(A - I)^3$ et $C_2 = \ker(A - 2I)^2$ et soit $f_1 =$ la restriction de f à C_1 et $f_2 =$ la restriction de f à C_2 .

i) Trigonaliser f_1 puis f_2 .

ii) Déterminer D diagonale, N nilpotente telle que $A = D + N$ avec $ND = DN$.

Ex 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

a) Trouver la réduite de Jordan B de A ainsi qu'une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

b) Résoudre le système suivant $\frac{dX}{dt} = AX$.

Ex 6 : En utilisant la réduite de Jordan, résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -11x + 8y - 16z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 10x - 7y + 14z \end{cases}$$

Ex 7 : Résoudre les systèmes suivants

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \exp t \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + t^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + B(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{21^{25}} \\ \frac{21}{25} \end{pmatrix} \end{cases} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 8 : Résoudre les équations différentielles suivantes

$$a) \frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$b) \frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0$$

Ex 9 : Soit $A \in M_n$ symétrique, montrer que $sp(A)$ est réel. (Calculer de deux façons différentes ${}^T X A X$, où ${}^T X$ désigne la transposée de X et X est un vecteur propre de A).

Ex 10 : Soit $f \in \ell(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p , déterminer le spectre de f , et montrer que $f - e$ est inversible.

Application : Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex11 : Si $f \in \ell(E)$ est nilpotent d'indice de nilpotence p , et $g \in \ell(E)$, tels que f et g commutent alors, $f \circ g$ est nilpotent.

Ex 12 : Jordaniser la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ex 13 : On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer le spectre de B , ses espaces propres et leurs dimensions.
- Soit $f \in \ell(E)$ canoniquement associé à B , calculer $\ker f^2$, $\ker (f - id)^2$ et $\ker (f - id)^2 \oplus \ker f^2$
- Déterminer $f_1 = f' \ker f^2$ et $f_2 = f' \ker (f - id)^2$.
- Jordaniser f_1 et f_2 , et en déduire une réduite de Jordan de B .

Ex 14 : On considère le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y + z + t \exp(-t) \\ \frac{dy}{dt} = x - y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y - z + \exp(2t) \end{cases} \iff \frac{dX}{dt} = AX + B(t) \quad (3.4.5)$$

- 1) Déterminer la solution générale du système homogène.
- 2) Déterminer une solution particulière du système (h), puis la solution de ce système prenant pour $t = 0$ les valeurs 1, -3 et 1.

3.5 Formes Bilinéaires

3.5.1 Introduction

On se souvient qu'une forme linéaire dans un espace vectoriel E sur un corps K est simplement une application linéaire f de E dans K .

3.6 Rappels sur les Formes linéaires

Définition 3.6 Si E est un espace vectoriel sur un corps K (non nécessairement de dimension finie). Une forme linéaire f est une application f de $E \rightarrow K$ qui est linéaire.

Notation : L'ensemble des formes linéaires de E dans K sera noté $\ell(E, K) = E^*$, est appelé espace dual de E .

Théorème 3.5 $\ell(E, K)$ est un K -espace vectoriel de dimension n , si $\dim E = n$.

Preuve : Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \ell(E, K)$, pour $x \in E$ on a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

On considère les n formes linéaires de E définies par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n. \text{ où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$B^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est appelée base duale de E^* .

Une forme bilinéaire généralise cette idée quand f est une application b de $E \times E \rightarrow K$ qui possède les propriétés suivantes :

Définition 3.7 Si E est un espace vectoriel sur un corps K (non nécessairement de dimension finie). Une forme bilinéaire b est une application b de $E \times E \rightarrow K$ qui est linéaire en chacune des deux variables :

$$\begin{aligned} b(x + y, z) &= b(x, z) + b(y, z) \\ b(x, y + z) &= b(x, y) + b(x, z) \\ b(\lambda x, y) &= \lambda b(x, y) = b(x, \lambda y) \quad \forall x, y, z \in E, \quad \forall \lambda \in K. \end{aligned}$$

(Sauf avis contraire, tout ce qui suit suppose que E est de dimension finie n .)

Remarque : Nous avons $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned} b(0, y) &= b(x, 0) = 0 \\ b(-x, y) &= -b(x, y) \\ b(-x, -y) &= b(x, y). \end{aligned}$$

Notation : L'ensemble des formes bilinéaires de $E \times E$ dans K sera noté $\ell_2(E, K)$.

Théorème 3.6 $\ell_2(E, K)$ est K -espace vectoriel de dimension n^2 .

Preuve : Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $b \in \ell_2(E, K)$, pour x et y on a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

On considère les n^2 formes bilinéaires de E définies par

$$b_{ij}(x, y) = x_i y_j \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Montrons que $B_1 = \{b_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} b_{ij} = 0 \stackrel{?}{\implies} \alpha_{ij} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

on prend $x = e_k$ et $y = e_l$ alors

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} b_{ij}(e_k, e_l) = \alpha_{kl} = 0$$

La famille est elle génératrice : Soient $x, y \in E$, alors

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right)$$

et par la bilinéarité de b on trouve

$$b(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j b(e_i, e_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij}(x, y) \beta_{ij} \text{ avec } \beta_{ij} = b(e_i, e_j).$$

D'où

$$b = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} \beta_{ij}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème.

Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

Ecrivons deux vecteurs x et y dans une base quelconque de E , $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

par la bilinéarité de b , on vérifie facilement que

$$b(x, y) = \sum_{i, j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j).$$

Ainsi, on voit que toute forme bilinéaire est connue une fois que l'on connaît b , sur tous les couples (e_i, e_j) de la base B (un peu comme une application linéaire elle est connue une fois connues les images des éléments de la base). Il paraît naturel de considérer la matrice

$$M(b)_B = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

de $M_n(K)$. Si on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

alors

$$b(x, y) = \sum_{i, j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j) = X^\perp M(b)_B Y$$

où l'on rappelle que ${}^*A^\perp$ désigne la transposée de la matrice A .

Exemple : Dans \mathbb{R}^3

$$b(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - x_3 y_1 + x_1 y_3$$

est une forme bilinéaire et que

$$b(x, y) = X^\perp \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y$$

Ex Les formes suivantes sont elles bilinéaires

$$b(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + y_3$$

et

$$b(x, y) = x_1y_1 + 2x_2^2y_2 - x_3y_1 + x_1y_3.$$

Effet du changement de base

Proposition 3.1 Soient B et B' deux bases de E et soit P la matrice de passage de B à B' . Alors

$$M' = P^\perp M P.$$

Preuve : On a :

$$X = P X' \text{ soit } X^\perp = (P X')^\perp = (X')^\perp (P)^\perp \text{ et}$$

$$Y = P Y', \quad T^\perp = (P Y')^\perp = (Y')^\perp (P)^\perp$$

donc on a :

$$b(x, y) = X^\perp M (b)_B Y = (X')^\perp (P)^\perp M (b)_B P Y' = (X')^\perp (M') Y'$$

d'où le résultat cherché.

Remarque : Il faut noter l'analogie de cette dernière formule avec celle concernant le changement de base pour les endomorphismes

Théorème 3.7 Une forme bilinéaire b sur un espace vectoriel E réel ($K = \mathbb{R}$) sera dite symétrique si $\forall x, y \in E$

$$b(x, y) = b(y, x)$$

Elle est dite antisymétrique si $\forall x, y \in E$

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

Elle est dite alternée si $\forall x \in E$

$$b(x, x) = 0$$

Elle sera dite définie positive si

$$i) \forall x \in E, b(x, x) \geq 0$$

$$ii) b(x, x) = 0 \iff x = 0.$$

Lemme 3.1 b est antisymétrique $\iff b$ est alternée.

Preuve : Supposons b antisymétrique, alors

$$b(x, y) = -b(y, x)$$

donc $b(x, x) = 0$ i.e ; b est alternée.

Réciproquement si b est alternée alors :

$$0 = b(x + y, x + y) = b(x, x) + b(y, y) + b(x, y) + b(y, x) \text{ soit } b(x, y) = -b(y, x) \quad (3.6.1)$$

Notation : L'ensemble des formes bilinéaires symétriques de $E \times E$ dans K sera noté $\mathfrak{S}_2(E, K)$

L'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques de $E \times E$ dans K sera noté $A_2(E, K)$.

Une matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$ est dite symétrique si

$$a_{ij} = a_{ji}, \text{ i.e. } A = A^\perp$$

Exemple : les matrices suivantes sont symétriques

$$(\alpha), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et soit $A = M_B(b)$ la matrice associée à b suivant la base B . Alors b est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.

Preuve : Supposons b symétrique alors :

$$a_{ij} = b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i) = a_{ji}$$

donc A est symétrique.

Supposons que A est symétrique

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i b\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i b\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i b\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j, e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j b(e_j, e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j b(e_i, e_j) \\ &= b(y, x) \end{aligned}$$

donc b est symétrique

Expression d'une forme bilinéaire symétrique

Soit $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Si

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \text{ et } a_{ij} = b(e_i, e_j)$$

on a :

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1}^n a_{ii} x_i y_j$$

ainsi

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j = n} a_{ji} x_j y_i + \sum_{1 \leq i < j = n} a_{ij} x_i y_j$$

ainsi une forme bilinéaire symétrique s'exprime par :

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j y_i + x_i y_j) a_{ij}.$$

Exercice : Montrer que $\mathfrak{S}_2(E, K)$ est un sous espace vectoriel de $\ell_2(E, K)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ dont une base est

$$B_1 = \{b_{ii}, b_{ij} + b_{ji} / i \neq j\}.$$

Et que

$$\ell_2(E, K) = \mathfrak{S}_2(E, K) \oplus A_2(E, K).$$

Définition 3.8 Une forme bilinéaire b qui est symétrique et définie positive s'appelle un produit scalaire et sera notée $\langle *, * \rangle$. Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien si E est de dimension infinie et un espace euclidien si E est de dimension finie.

Rang et Noyau d'une forme bilinéaire

Proposition 3.2 Si b est une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E . On appelle "rang de b " [rgb] le rang de la matrice M qui représente b dans une base donnée. Si M et M' sont les matrices de b dans les bases B et B' , $rg(b) = rg(M) = rg(M') \implies$ le rang de b ne dépend pas de la base. Le déterminant de M appelé discriminant de la forme b dépend de la base, mais sa nullité, ou non nullité, est invariante par un changement de base :

$$\det M = 0 \iff \det M' = 0.$$

On dira que b est non dégénérée si $rg(b)$ est maximum :

$$rg(b) = n \iff rg(M) = n \iff \det M \neq 0 :$$

ces définitions sont cohérentes puisque le rang et la (non) nullité du déterminant sont invariants par un changement de base.

Démonstration : L'invariance du rang de la matrice provient du résultat suivant

$$rg(AP) = rg(PA) = rg(A)$$

si P est inversible. Si M et M' sont les matrices de b relativement aux bases B et B' , respectivement, remarquons :

$$rg(M') = rg(P^\perp MP) = rg((P^\perp M) = rg(M)$$

(puisque P et de P^\perp sont inversibles). L'invariance de la (non) nullité se déduit de

$$\det M' = \det (P^\perp MP) = \det (M) \det (P^2)$$

Alors $\det (M) = 0$ si et seulement si $\det M' = 0$, puisque $\det (P)$ est toujours $\neq 0$.

Insistons sur le fait que le rang de b ne sera pas la dimension de l'image de b . En effet cette image, qui est incluse dans K , est soit $\{0\}$ (de dimension 0) soit K (de dimension 1). Par contre on va maintenant voir que $rg(b)$ peut être considéré comme la dimension de l'image d'une certaine application linéaire dont la matrice est M (La matrice de b dans une base donnée B).

Considérons l'application

$$J : E \rightarrow E^*, E^* \text{ désigne le dual de } E$$

définie de la façon suivante :

$$J : y \in E \rightarrow J_y : \text{ définie par } J_y(x) = b(x, y).$$

En d'autres termes l'image J_y d'un vecteur y est la forme linéaire en x (paramétrée en quelque sorte par y) qui à x fait correspondre $b(x, y)$. On peut alors voir que la matrice de l'application qui à y fait correspondre la forme linéaire $J_y : J_y(x) = b(x, y)$ n'est autre que M , lorsque la base utilisée dans E^* est la base B^* duale de B . On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3 *La matrice de l'application J est M , et donc, le $rg(b)$ de la forme bilinéaire b est le rang de J au sens classique des applications linéaires, c'est à dire la dimension de $Im(J) =$ la dimension de l'espace des formes linéaires $J_y : J_y(x) =$*

$b(x, y)$.

On appellera noyau de la forme bilinéaire b - noté $N(b)$ - le noyau de J :

$$\begin{aligned} N(b) &= \{y \in E \text{ tel que } J_y(x) = b(x, y) = 0\} \\ &= \{y \in E \text{ tel que } b(x, y) = 0 \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire est non dégénérée si et seulement si

$$\begin{aligned} \det M \neq 0 &\iff N(b) = \{0\} \\ &\iff \{y \in E \text{ tel que } \forall x \in E \ b(x, y) = 0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Enfin le théorème de la dimension, appliqué à J , permet d'affirmer que

$$\dim E = n = \text{rg}(b) + \dim N(b).$$

Exemple

soit $b(x, y) = (y_1 + y_2 - y_3)x_1 + (y_1 - 3y_3)x_2 + (-y_1 - 3y_2 - 3y_3)x_3$

que l'on peut également écrire $b(x, y) = X^T M Y$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $\text{rg}(b) = 2$ et cherchons le noyau de b , c'est à dire les y tels que les formes linéaires $J_y(x) = b(x, y)$ soient nulles= les y tels que $b(x, y) = 0$ pour tout x . Il faut donc que

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 &= 0 \\ y_1 - 3y_3 &= 0 \\ -y_1 - 3y_2 - 3y_3 &= 0 \end{cases} .$$

ce système est exactement celui que l'on obtient quand on cherche le noyau de l'application linéaire dont la matrice est M . On trouve que la solution Y est de la forme $y_1 = 3\lambda; y_2 = -2\lambda; y_3 = \lambda$.

Exercices

Ex 1 : Soit $E = C(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} continues. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout f de E par $T(f) = \int_a^b f(t)dt$.

Montrer que T est une forme linéaire.

Ex 2 : Dire si les applications suivantes sont des formes bilinéaires de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans \mathbb{R}

a) $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + 3x_3y_1 + 1.$

b) $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 3x_3y_2^{-1}.$

c) $b(x, y) = x_1y_1 + 3x_3y_3 + x_3y_1^2.$

Ex 3 : Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + 3x_3y_1 + x_3y_2$$

i) Ecrire la matrice de b dans la base canonique. Calculer le rang de b , $N(b) =$ noyau de b , et $b(x, y)$ pour $x = (2, -1, 0)$ et $y = (5, 15, 1)$.

ii) Ecrire la matrice de b dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.

Ex 4 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur K ($K = \mathbb{R}$ ou C). Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Pour tout $\lambda \in K$ on définit l'application b_λ de $E \times E$ dans K par $\forall (x, y) \in E \times E$

$$b_\lambda(x, y) = \lambda x_1y_1 - 2x_1y_2 + \lambda x_1y_3 + x_2y_1 + (\lambda + 2)x_2y_3 + 2x_3y_2 - \lambda x_3y_3$$

a) Ecrire la matrice associée à b_λ dans la base B . Pour tout $\lambda \in K$, b_λ est elle symétrique ?

b) Déterminer suivant les valeurs de λ le rang de b_λ . Pour quelles valeurs de λ est elle dégénérée.

Ex 5 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} , $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3.$

a) Montrer que φ est une forme quadratique

b) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à φ . Soit b cette forme bilinéaire

c) Déterminer la matrice associée à b par rapport à la base B .

d) La forme bilinéaire b est elle dégénérée ? Déterminer son noyau et son rang.

Ex 6) Soit la forme bilinéaire

$$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

définie dans la base canonique par

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + 6x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

a) Ecrire la matrice de b dans la base canonique ; calculer $N(b)$, $rg(b)$ et $b(x, y)$ où $x = (2, -1, 0)$, $y = (5, 15, 1)$.

b) Ecrire la matrice de b dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

3.7 Formes quadratiques

Définition 3.9 Soit $b \in \ell_2(E, K)$, on appelle forme quadratique associée à b , l'application q de E dans K définie de la façon suivante :

$$q(x) = b(x, x), \forall x \in E.$$

Exemple

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est associée la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

On note l'ensemble des formes quadratiques $Q(E)$, qui est un espace vectoriel.

Remarque L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{S}_2(E, K) &\rightarrow Q(E) \\ b &\rightarrow q \end{aligned}$$

définie par $q(x) = b(x, x)$, n'est pas bijective car si q est associée à b , comme $\forall b' \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ on a : $q'(x) = b'(x, x) = 0 \forall x \in E$, on a $\varphi(b + b') = q$.

Proposition 3.4 $Q(E)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_2(E, K)$.

Preuve Soit x

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{S}_2(E, K) &\rightarrow Q(E) \\ b &\rightarrow I(b) = q \end{aligned}$$

où q est définie par $q(x) = b(x, x)$.

$$\begin{aligned} q(x + y) &= b(x + y, x + y) \\ &= b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) + b(y, y) \\ &= q(x) + q(y) + 2b(x, y) \end{aligned}$$

d'où

$$b(x, y) = \frac{1}{2} [q(x + y) - q(x) - q(y)]$$

ainsi I est surjective. Soit $q \in q(x) + q(y)$, q associée à $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ alors

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) &= \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{2} [b(x+y, x+y) - b(x, x) - b(y, y)] \\ &= \frac{1}{2} [b(x, y) + b(y, x)] \in \mathfrak{S}_2(E, K) \end{aligned}$$

I est injective

$$I(b_1) = I(b_2)$$

c'est à dire que $q_1 = q_2$. Or

$$\begin{aligned} b_1(x, y) &= \frac{1}{2} [q_1(x+y) - q_1(x) - q_1(y)] \\ &= b(x, y) \\ &= \frac{1}{2} [q_2(x+y) - q_2(x) - q_2(y)] \end{aligned}$$

donc $b_1 = b_2$ et I est injective.

Conséquence

$$\dim_K Q(E) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Définition 3.10 $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ est appelée forme polaire de q image de b par I .

Représentation matricielle d'une forme quadratique :

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

On sait que $q(x) = X^T M(b)_B X$ où $M(b)_B = (b(e_i, e_j))$.

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j = n} x_j x_i a_{ij}.$$

est la représentation explicite de q .

3.7.1 Caractérisation des formes quadratiques

Théorème 3.8 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) q est une forme quadratique sur E

ii) Il existe une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E et une matrice symétrique A telle que

$$q(x) = X^{\perp}AX$$

iii) Il existe $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$, unique telle que

$$q(x) = b(x, x)$$

iv) Pour toute base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E et pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ $q(x)$ est un polynôme homogène en $x_i \in K$ d'ordre 2.

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$ et $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ un élément de E . Pour

$$\begin{aligned} q(x) &= 1\pi \int_0^{\pi} (x_1 + x_2 \sin \theta)^2 d\theta \\ &= 1\pi \int_0^{\pi} (x_1^2 + 2x_1 x_2 \sin \theta + x_2^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= 1\pi \int_0^{\pi} \left[x_1^2 + 2x_1 x_2 \sin \theta + x_2^2 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= 1\pi \left[x_1^2 \theta - 2x_1 x_2 \cos \theta + \frac{1}{2} x_2^2 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_0^{\pi} \\ &= 1\pi \left[x_1^2 \pi + 4x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 \pi \right] \end{aligned}$$

est une forme quadratique car c'est un polynôme homogène de degré deux.

Définition 3.11 *Si q est une forme quadratique, les vecteurs x tels que $q(x) = 0$ sont dits isotropes, et constituent le cône isotrope*

$$c(q) = \{x \text{ tels que } q(x) = 0\}$$

3.8 Orthogonalité

Soit $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ et q la forme quadratique associée à b .

Définition 3.12 i) *On dit que x et y , éléments de E , sont orthogonaux par rapport à b (ou à q) si $b(x, y) = 0$. On note ceci $x \perp_b y$.*

ii) *Deux parties de E , M et N sont dites orthogonales par rapport à b (ou à q) si tout élément de M est orthogonal à tout élément de N , $b(x, y) = 0$. On le note $M \perp N$.*

iii) *L'orthogonal de M noté*

$$M^{\perp} = \{x \in E, \quad b(x, y) = 0, \forall y \in M\}$$

c'est l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à M .

Remarque : 1) M^\perp est un sous espace vectoriel de E .

Exemples : 1) Soit $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$, arbitraire, on a $\{0\}^\perp = E$.

2) Pour $E = \mathbb{R}^2$ et $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ dans la base canonique de E , on a :

$$\{(1, 2)\}^\perp = \{(x_1, x_2) \in E / x_1 + 2x_2 = 0\}$$

3) Considérons dans \mathbb{R}^3 la forme quadratique de \mathbb{R}^3 définie par

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 4x_3x_2$$

$$q(x) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T AX.$$

La forme polaire qui lui est associée est donnée par

$$b(x, y) = x_1y_2 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_2y_1 + x_1y_2) + 2x_2y_3 + 2x_3y_2.$$

3.8.1 Classification des formes quadratiques

Théorème 3.9 (Loi d'inertie de Sylvester), Soit q une forme quadratique de rang r ($0 \leq r \leq n$). Alors il existe une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthogonale de E relativement à laquelle q s'écrit sous la forme suivante pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots x_r^2 \tag{3.8.1}$$

avec p un entier qui ne dépend que de q . En particulier p ne dépend pas de la base B .

Preuve Soit $B_1 = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base orthogonale de E dont les éléments sont classés de sorte que

$$b(f_i, f_i) = \lambda_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p$$

$$b(f_j, f_j) = \lambda_j < 0 \text{ pour } j = p + 1, \dots, r$$

$$b(f_k, f_k) = 0 \text{ pour } k = r + 1, \dots, n$$

alors

$$M(b, B_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose

$$e_i = \frac{f_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}, \quad 1 \leq i \leq p$$

$$e_j = \frac{f_j}{\sqrt{-\lambda_j}}, \quad p+1 \leq j \leq r$$

$$e_k = f_k, \quad r+1 \leq k \leq n$$

Alors

$$B = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$$

est une base de E dans laquelle

$$M(b, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a :

$$q(x) = X^\perp M(b, B) X = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^r x_j^2.$$

p ne dépend pas de la base B .

Si

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n y_j f_j$$

avec (e_i) et (f_j) deux bases de E et

$$q(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^r x_j^2 = \sum_{i=1}^s y_i^2 - \sum_{j=s+1}^r y_j^2$$

donc

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 + \sum_{j=s+1}^r y_j^2 = \sum_{i=1}^s y_i^2 + \sum_{j=p+1}^r x_j^2 \quad (3.8.2)$$

Si $s > p$ on choisit

$$x \in \underbrace{\text{vect}[e_{p+1}, \dots, e_r, \dots, e_n]}_F \cap \underbrace{\text{vect}[f_1, \dots, f_s]}_G$$

On a : $F \cap G \neq \{0\}$ car sinon on aura :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G \leq n$$

d'où $(n - p) + s \leq n \implies p \geq s$ ce qui est en contradiction. Donc il existe $x \neq 0, x \in F \cap G$, or

$$x \in F \implies x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$$

et

$$x \in G \implies y_{s+1} = y_{s+2} = \dots = y_r = y_{r+1} = \dots = y_n = 0$$

et de la relation (***) on a :

$$\sum_{i=1}^s y_i^2 + \sum_{j=p+1}^r x_j^2 = 0 \implies y_1 = y_2 = \dots = y_s = 0$$

donc $x = 0$, contradiction avec $x \neq 0$. Donc l'hypothèse $s > p$ est fautive de la même manière on écarte l'hypothèse $s < p$ donc $p = s$.

Décomposition en carrés des formes quadratiques par la Méthode de Gauss.

Raisonnons par récurrence, et supposons qu'on sache mettre toute forme quadratique q sur K^{n-1} sous la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i^2,$$

les u_i étant des formes linéaires indépendantes par rapport à x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Soit alors $q(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ une forme q sur K^n

1er Cas : q contient un terme en x_1^2 et peut s'écrire

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + 2R(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)x_1 + S(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

avec $\lambda_1 \neq 0$

$R(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ étant une forme linéaire par rapport à x_2, x_3, \dots, x_n et $S(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ une forme quadratique en $(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$

$$q(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{R}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{R^2}{\lambda_1} + S(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

où R est mis pour $R(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$. Par hypothèse de récurrence

$$S(x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - \frac{R^2}{\lambda_1} = \sum_{i=2}^r \lambda_i u_i^2$$

où les (u_i) sont des formes linéaires indépendantes par rapport à x_2, \dots, x_{n-1}, x_n .

En posant $u_1 = x_1 + \frac{R}{\lambda_1} \implies$

$$q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i^2.$$

2ème cas q ne contient pas de terme en x_1^2 (avec un changement d'indexation des x_i)

$$\begin{aligned} q(x) &= ax_1x_2 + R(x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)x_1 \\ &+ S(x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)x_2 + T(x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

$a \neq 0$, R et S étant des formes linéaires en x_3, \dots, x_{n-1}, x_n , T une forme quadratique en x_3, \dots, x_{n-1}, x_n

On écrit

$$q(x) = a \left[\left(x_1 + \frac{S}{a} \right) \left(x_2 + \frac{R}{a} \right) - \frac{RS}{a^2} \right] + T \left(x_1 + \frac{S}{a} \right) \left(x_2 + \frac{R}{a} \right)$$

ou

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} (u_1^2 - u_2^2) \\ u_1 &= x_1 + x_2 + \frac{R}{a} + \frac{S}{a} \\ u_2 &= x_1 - x_2 - \frac{R}{a} + \frac{S}{a}. \end{aligned}$$

Enfin

$$T - \frac{RS}{a} = \sum_{i=3}^r \lambda_i u_i^2.$$

Ce qui achève la preuve .

Définition 3.13 On appelle signature de q le couple $(p, r - p)$ où p désigne le nombre de carrés précédés du signe plus et $r - p$ désigne le nombre de carrés précédés du signe moins dans la relation (**).

Exemple : dans \mathbb{R}^4 la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

a pour signature le couple $(3, 1)$.

Définition 3.14 Deux formes quadratiques sont dites équivalentes sur un même espace vectoriel E si elles ont la même signature.

Exemples

$$\begin{aligned} q(X) &= yz + zx + xy \\ &= (x + z)(y + z) - z^2 \\ &= \frac{1}{4} (x + y + 2z)^2 - \frac{1}{4} (x - y)^2 - z^2 \end{aligned}$$

q est une forme de rang 3, de type (1, 2).

Dans \mathbb{R}^4 , on considère la forme quadratique

$$\begin{aligned} q(X) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2zt + tx + 3xy - yt \\ &= 3z^2 - 2tz + q_1 \\ &= 3\left(z - \frac{t}{3}\right)^2 - \frac{t^2}{3} + q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 - \frac{t^2}{3} &= x^2 + 2y^2 - \frac{t^2}{3} + tx + 3xy - yt \\ &= \left[x + \frac{1}{2}(t + 3y)\right]^2 - \frac{1}{4}((t + 3y)^2 + 2y^2 - \frac{t^2}{3} - yt), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}((t + 3y)^2 + 2y^2 - \frac{t^2}{3} - yt) &= -\frac{1}{4}y^2 - \frac{7}{12}t^2 - \frac{5}{2}yt \\ &= -\frac{1}{4}((y + 5t)^2 + \frac{17}{3}t^2). \end{aligned}$$

Ainsi

$$q(X) = 3\left[z - \frac{t}{3}\right]^2 + \left[x + \frac{1}{2}(t + 3y)\right]^2 - \frac{1}{4}[y + 5t]^2 + \frac{17}{3}t^2.$$

q est une forme de rang 4 et de signature (3, 1)

Chapitre 4

Espaces Vectoriels Euclidiens

Soient $K = \mathbb{R}$, E un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie n , $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ et q la forme quadratique associée à b .

4.1 Formes positives et formes définies positives

Définition 4.1 On dit que b est positive si $\forall x \in E \ b(x, x) \geq 0$ ou $q(x) \geq 0$. On dit que b (resp. q) est négative si $\forall x \in E \ b(x, x) \leq 0$ (resp $q(x) \leq 0$).

Remarque Si b est négative alors $(-b)$ est positive.

On ne considère que les formes positives.

Définition 4.2 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , on appelle norme sur E , toute application

$$p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

qui vérifie

i) $p(x) = 0 \iff x = 0$

ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

On note

$$p(x) = \|x\|.$$

Théorème 4.1 Soit $b \in \mathfrak{S}_2(E, \mathbb{R})$ définie positive et q sa forme quadratique associée, alors l'application :

$$x \in E \rightarrow p(x) = [b(x, x)]^{\frac{1}{2}} = [q(x)]^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^+$$

est une norme sur E .

Preuve :

$$p(x) = [b(x, x)]^{\frac{1}{2}} = [q(x)]^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$p(\lambda x) = [b(\lambda x, \lambda x)]^{\frac{1}{2}} = |\lambda| p(x)$$

$$p(x + y) = [b(x + y, x + y)]^{\frac{1}{2}} \leq [b(x, x)]^{\frac{1}{2}} [b(y, y)]^{\frac{1}{2}}$$

en utilisant l'inégalité de Minkowski, on aura ce qu'il fallait.

4.1.1 Propriétés

Théorème 4.2 Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E orthogonale relativement à la forme b . Alors on a l'équivalence suivante b est positive $\Leftrightarrow (\forall i = 1, 2, \dots, n) b(e_i, e_i) \geq 0$.

Preuve : Condition suffisante,

$$b(x, x) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j^2 b(e_j, e_j) \geq 0.$$

Théorème 4.3 Inégalité de Schwartz : Si b est positive alors $\forall (x, y) \in E \times E$, on a :

$$[b(x, y)]^2 \leq b(x, x) \times b(y, y).$$

Démonstration : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$ on a :

$$0 \leq b(x + \lambda y, x + \lambda y) = \lambda^2 b(y, y) + 2\lambda b(x, y) + b(x, x)$$

Si $b(y, y) \neq 0$ on a : l'inégalité si et seulement si le discriminant du trinôme est négatif

$$\Delta' = [b(x, y)]^2 - b(x, x)b(y, y) \leq 0.$$

Si $b(y, y) = 0$ on a :

$$2\lambda b(x, y) + b(x, x) \geq 0, \forall x, y \in E.$$

Donc $b(x, y) = 0$ et l'inégalité désirée est satisfaite car sinon par exemple supposons $b(x, y) > 0$ alors

$$2\lambda + \frac{b(x, x)}{b(x, y)} \geq 0.$$

Il suffit de prendre

$$\lambda < -\frac{b(x, x)}{2b(x, y)}$$

pour avoir une contradiction.

Inégalité de Minkowski

$$[q(x + y)]^{\frac{1}{2}} \leq [q(x)]^{\frac{1}{2}} + [q(y)]^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve

$$b(x + y, x + y) = b(y, y) + 2b(x, y) + b(x, x) = q(x) + q(y) + 2b(x, y),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} q(x + y) &\leq q(x) + q(y) + 2[q(x)]^{\frac{1}{2}} \times [q(y)]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ [q(x)]^{\frac{1}{2}} + [q(y)]^{\frac{1}{2}} \right\}^2. \end{aligned}$$

Noyau d'une forme positive

Théorème 4.4 *Si $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ est positive alors $N(b) = E^\perp = I$ ensemble de tous les vecteurs isotropes de b que l'on notera I .*

Démonstration : on a déjà vu que $N(b) \subset I$. soit $x \in I$ donc $b(x, x) = 0$, alors

$$0 \leq [b(x, y)]^2 \leq b(x, x) \times b(y, y) = 0, \quad \forall y \in E.$$

ceci implique que

$$b(x, y) = 0 \quad \forall y \in E \implies x \in E^\perp.$$

Soit $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ positive, non dégénérée. Alors le seul vecteur isotrope est le vecteur nul.

En effet : $N(b) = I = \{0\}$.

Définition 4.3 *On dit que b (resp q) est définie si le seul vecteur isotrope est le vecteur nul c'est à dire : b est définie $\iff [b(x, x) = 0 \implies x = 0]$*

Remarques i) on voit que si b est positive non dégénérée alors b est définie.

ii) Si b est définie alors b est non dégénérée car $N(b) \subset \{\text{éléments isotropes}\} = \{0\}$.

Ainsi on a l'équivalence suivante, si b est positive :

$$b \text{ est définie } \iff b \text{ non dégénérée}$$

iii) En général, la réciproque de ii) est fautive : Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ exprimés dans la base canonique de \mathbb{R}^2 et $b(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ on a vu que b est non dégénérée. Cependant b n'est pas définie car $b((1, 1), (1, 1)) = 0$ et $(1, 1) \neq 0$.

Lemme 4.1 *Soit $b \in \mathfrak{S}_2(E, K)$ q sa forme quadratique associée de signature $(p, r - p)$. On a : les équivalences suivantes :*

i) b est définie positive si et seulement si $n = r$ (la signature de b est $(n, 0)$

ii) b de rang r est positive si et seulement si la signature de b est $(r, 0)$.

Preuve : Soit $B_1 = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base orthogonale de E

$$b(x, x) = q(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2 b(f_i, f_i) = \sum_{i=1}^r \left(x_i \sqrt{b(e_i, e_i)} \right)^2$$

donc $p = r \implies r - p = 0$.

Exercices

Ex 1 : Lesquelles des expressions suivantes définissent elles des formes quadratiques, donnez leur forme polaire et la matrice de la forme bilinéaire associée :

i) $q(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_3x_2 - x_2^2$

ii) $q(x) = x_1 + x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_3x_2 - x_2^2$

Ex 2 : Soit $q \in Q(E)$ et $s \in \ell_2(E, K)$ sa forme polaire. Montrer que

$$s(x, y) = \frac{1}{4} [q(x + y) - q(x - y)].$$

Ex 3 : Déterminer les vecteurs isotropes de la forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 .

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_3x_2$$

Ex 4 : Soit $E = \mathbb{R}^2$

$$q : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2$$

i) Montrer que q est une forme quadratique.

ii) Ecrire la matrice associée à q dans la base canonique de E .

iii) Déterminer le noyau et le rang de q .

iv) Déterminer l'ensemble des éléments isotropes de q .

Ex 5 : Soit $E = \mathbb{R}^4$

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

i) Déterminer le rang de f .

ii) Soit

$$F = \{x \in E, x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = x_4\}$$

Déterminer F^\perp et $F \cap F^\perp$, que peut on conclure pour F .

Ex 6 : En utilisant le méthode de Gauss et en discutant suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, décomposer en combinaison linéaire de carrés de formes quadratiques indépendentes, la forme quadratique q définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2\lambda yz + z^2$$

Dans chaque cas on donnera le rang et la signature de q .

Ex 7 : Soit $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

$q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

i) Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q . Calculer $f(X, Y)$ pour X et $Y \in \mathbb{R}^3$.

ii) Vérifier que B_0 est orthogonale pour f , et trouver la matrice A représentant f dans B_0 .

iii) La forme f est elle dégénérée

Ex 8 Soit (E, q) un espace euclidien, on désigne par N la norme associée à q et par b la forme polaire de q . Montrer que

i) $N(x) = N(y) \iff b(x + y, x - y) = 0$

ii) $[N(x + y)]^2 = [N(x)]^2 + [N(y)]^2 \iff b(x, y) = 0$.

iii) Soit x un élément de E non nul, montrer que $N(x + y) = N(x) + N(y)$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = \alpha x$

Ex 9 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} , $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_2x_3 - x_1x_3$.

a) Montrer que φ est une forme quadratique

b) Ecrire la matrice A associée à φ par rapport à la base B .

c) En déduire la forme bilinéaire symétrique associée à φ . Soit f cette forme bilinéaire

d) Retrouver f sans utiliser A

e) La forme bilinéaire f est elle dégénérée? Déterminer son noyau et son rang.

Chapitre 5

Espaces Vectoriels Hermetiens

5.1 Formes Hermitiennes

Dans ce chapitre le corps de base est $K = \mathbf{C}$

5.1.1 Forme Sesquilinéaire

Définition 5.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{C} , et h une fonction de $E \times E$ dans \mathbf{C} . On dit que h est une forme sesquilinéaire si

i) h est semi linéaire (ou anti-linéaire) par rapport à la première variable. Précisément,

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \alpha \in \mathbf{C}, h(x + \alpha y, z) = h(x, z) + \bar{\alpha}h(y, z).$$

(La condition de semi-linéarité, et non de linéarité, signifie donc qu'on prend le conjugué du complexe).

ii) h est linéaire par rapport à la deuxième variable, c'est à dire

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \alpha \in \mathbf{C}, h(x, y + \alpha z) = h(x, y) + \alpha h(x, z).$$

Une forme sesquilinéaire est appelée forme hermetienne si elle vérifie en outre la propriété de symétrie suivante

$$\forall x, y \in E, h(y, x) = \overline{h(x, y)}$$

Les formes hermetiennes sont l'analogie pour les \mathbf{C} -espaces vectoriels des formes bilinéaires symétriques des \mathbf{R} -espaces vectoriels. En particulier, la condition de symétrie hermetienne permet d'imposer à $h(x, x)$ d'être réel. Signalons que dans certains livres, une forme sesquilinéaire est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la deuxième.

Théorème 5.1 L'ensemble des formes sesquilinéaires est un \mathbf{C} - espace vectoriel noté $S_q(E, \mathbf{C})$ de dimension n^2

Matrice associée et représentation matricielle de h .

Soient $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $h \in S_q(E, \mathbf{C})$
 Par définition

$$M(h, B) = (h(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = A$$

est la matrice associée à h relativement à B .

Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \cdot \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$$

on a

$$\boxed{h(x, y) = {}^t X A \overline{Y} = {}^t \overline{Y} {}^t A X}$$

Si on change de base et $A' = M(h, B')$ avec B' une autre base de E on a :

$$A' = {}^t P A \overline{P} \text{ avec } P \text{ la matrice de passage de } B \text{ à } B'$$

Formes hermitiennes et formes quadratiques hermitiennes

Définition 5.2 $h \in S_q(E, \mathbf{C})$ est dite forme hermitienne sur E si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x, y \in E \quad h(x, y) = \overline{h(y, x)}$$

on note l'ensemble des formes hermitiennes $S_h(E, \mathbf{C})$.

Remarque : $S_h(E, \mathbf{C})$ n'est pas un sous espace vectoriel de $S_q(E, \mathbf{C})$. Il est seulement un sous groupe de $S_q(E, \mathbf{C})$. En effet si $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ $\alpha h \notin S_h(E, \mathbf{C})$ en général.

Remarque : i) Si B est une base de E et $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ alors, $M(h, B)$ est hermitienne.

ii) on appelle forme quadratique hermitienne sur E associée à une forme hermitienne h l'application q définie par :

$$q : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto h(x, x)$$

on a la relation suivante entre h et q :

$$h(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4} + i \frac{q(x+iy) - q(x-iy)}{4}$$

5.2 Orthogonalité et isotropie :

Soient $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E et $h \in S_h(E, \mathbf{C})$

Orthogonalité :

Définition 5.3 x est orthogonal à y si $h(x, y) = 0$, si $F \subset E$, on appelle orthogonal de F et on note F^\perp l'ensemble défini par :

$$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F \ h(x, y) = 0\}$$

on note par la suite $N(h) = E^\perp$

on dit que h est non dégénérée si $N(h) = \{0\}$

Lemme 5.1 Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) h est non dégénérée
- ii) $A = (h(e_i, e_i))_{ij}$ est inversible
- iii) $\det(A) \neq 0$

Proposition 5.1 Si $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ est non dégénérée alors pour tout sous-espace F de E on a :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp = F$$

Isotropie :

Définition 5.4 Soit $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ et $F \subset E$

- i) Soit $x \in E$, x est dit isotrope si $h(x, x) = 0$.
- ii) L'ensemble F de E est dit isotrope si

$$F \cap F^\perp \neq \{0\}.$$

Définition 5.5 Soit $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ non dégénérée, pour tout espace F de E , les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) la restriction de h à F est non dégénérée
- 2) F est non isotrope
- 3) $F \cap F^\perp = \{0\}$
- 4) $F \oplus F^\perp = E$
- 5) F^\perp est non isotrope

5.3 Bases orthogonales et orthonormales relativement à h .

Soient $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ et $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E .

Définition 5.6 *i) B est dite base orthogonale relativement à h si $h(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.
ii) B est une base orthonormale relativement à h si*

$$h(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Remarque : De façon générale si $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ on a :

$$q(x) = {}^t X A \bar{X}$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ dans une base de E .

Par suite

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i \bar{x}_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$$

Si B est orthogonale relativement à h on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2.$$

Si q ou h est de rang r ($r \leq n$)

$$q(x) = \sum_{i=1}^r a_{ii} |x_i|^2.$$

Théorème 5.2 (Loi d'inertie de Sylvester) *Soient E un espace de Banach de dimension n sur \mathbf{C} et h une forme hermitienne de rang r . Soit q sa forme quadratique hermitienne associée. Il existe alors, une base orthonormée relativement à h et un couple (p, s) telle que :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^p |x_i|^2 - \sum_{i=p+1}^r |x_i|^2 \quad \text{avec } p + s = r \quad \text{et } h(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i \bar{y}_i - \sum_{i=p+1}^r x_i \bar{y}_i$$

Définition 5.7 *Le couple (p, s) s'appelle la signature de q ou de h .*

Inégalités de Schwartz et de Minkowski.

Définition 5.8 Soit $h \in S_h(E, \mathbf{C})$, on dit que h est positive si

$$\forall x \in E, h(x, x) \geq 0.$$

Proposition 5.2 Si h est positive alors

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |h(x, y)| \leq [q(x)]^{\frac{1}{2}} \cdot [q(y)]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{inégalité de Schwartz})$$

Preuve : Si $h(x, y) = 0$ alors $[q(x)]^{\frac{1}{2}} \cdot [q(y)]^{\frac{1}{2}} \geq 0$ donc l'inégalité est vérifiée dans ce cas.

Si $h(x, y) \neq 0$ on calcule pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} h(x + \lambda y, x + \lambda y) &= h(x, x) + h(x, \lambda y) + h(\lambda y, x) + h(\lambda x, \lambda y) \\ &= h(x, x) + \bar{\lambda}h(x, y) + \lambda h(y, x) + \lambda \bar{\lambda}h(x, y) \end{aligned}$$

En particulier pour $\lambda = \mu \frac{h(x, y)}{|h(x, y)|}$ on a :

$$\begin{aligned} h(x + \lambda y, x + \lambda y) &= h(x, x) + h(x, \lambda y) + h(\lambda y, x) + h(\lambda x, \lambda y) \\ &= h(x, x) + \mu \frac{h(x, y)}{|h(x, y)|} h(x, y) \\ &\quad + \mu \frac{h(x, y)}{|h(x, y)|} \overline{h(x, y)} + \mu^2 \frac{|h(x, y)|^2}{|h(x, y)|^2} h(y, y) \end{aligned}$$

Si $h(y, y) \neq 0$ alors

$$|h(x, y)|^2 - h(x, x) \cdot h(y, y) \leq 0.$$

Si $h(y, y) = 0$ alors

$$h(x, x) + 2\mu |h(x, y)| \geq 0 \quad \forall \mu \geq 0$$

donc,

$$|h(x, y)| = 0.$$

Inégalité de Minkowski.

Soit $h \in S_h(E, \mathbf{C})$ positive alors,

$$\forall x, y \in E \quad [q(x + y)]^{\frac{1}{2}} \leq (q(x))^{\frac{1}{2}} + (q(y))^{\frac{1}{2}}$$

5.4 Espaces Préhilbertiens.

Définition 5.9 a) Soient E un espace vectoriel complexe, h une forme hermitienne sur E on dit que h est un produit scalaire si :

$$1) h(x, x) \geq 0 \forall x \in E$$

$$2) h(x, x) = 0 \iff x = 0.$$

b) on appelle espace préhilbertien réel tout \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. (La dimension de E est quelconque.). Si sa dimension est finie on dit que E est un espace euclidien.

Définition 5.10 On appelle espace préhilbertien complexe tout \mathbb{C} espace vectoriel muni d'une forme hilbertienne positive non dégénérée.

Exercices

Ex 1 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur \mathbb{R} , $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$.

- a) Montrer que φ est une forme quadratique
- b) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à φ . Soit b cette forme bilinéaire
- c) Déterminer la matrice associée à b par rapport à la base B .
- d) La forme bilinéaire b est elle dégénérée? Déterminer son noyau et son rang.

Ex 2 : Lesquelles des expressions suivantes définissent elles des formes quadratiques, donnez leur forme polaire et la matrice de la forme bilinéaire associée :

$$i) q(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_3x_2 - x_2^2$$

$$ii) q(x) = x_1 + x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_3x_2 - x_2^2$$

Ex 3 : Soit $q \in Q(E)$ et $s \in \ell_2(E, K)$ sa forme polaire. Montrer que

$$s(x, y) = \frac{1}{4} [q(x + y) - q(x - y)].$$

Ex 4 : Déterminer les vecteurs isotropes de la forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 .

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_3x_2$$

Ex 5 : Soit $E = \mathbb{R}^2$

$$q : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2$$

- i) Montrer que q est une forme quadratique.
- ii) Ecrire la matrice associée à q dans la base canonique de E .

- iii) Déterminer le noyau et le rang de q .
- iv) Déterminer l'ensemble des éléments isotropes de q .

Ex 6 : Soit $E = \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 \end{aligned}$$

- i) Déterminer le rang de f .

ii) Soit

$$F = \{x \in E, x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = x_4\}$$

Déterminer F^\perp et $F \cap F^\perp$, que peut on conclure pour F .

5.5 Procédé d'Orthogonalisation de Schmidt

On va voir qu'une base quelconque de E peut être orthogonalisée, c'est à dire transformée en une base orthogonale.

Proposition 5.3 *A partir d'une base $\{v_i\}$ quelconque d'un espace euclidien E , on peut construire une base orthonormée $\{e_i\}$.*

Preuve : on va d'abord construire une base orthogonale $\{u_i\}$, puis la normer par $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$.

On commence par prendre $u_1 = v_1$.

On cherche ensuite u_2 orthogonal à u_1 de la forme $u_2 = v_2 + \lambda_1 u_1$ pour un λ_1 bien choisi

$$u_2 \perp u_1 \implies (v_2 + \lambda_1 u_1) \perp u_1$$

\implies

$$\langle v_2, u_1 \rangle + \lambda_1 \|u_1\|^2 = 0 \implies \lambda_1 = -\frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}.$$

Ce λ_1 ainsi calculé donne u_2 .

On cherche u_3 de la même façon

$$u_3 = v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \text{ avec } u_3 \perp u_1 \text{ et } u_3 \perp u_2$$

et λ_1, λ_2 à trouver, ce qui implique

$$(v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \perp u_i \quad (i = 1, 2)$$

\implies

$$(v_3 + \lambda_2 u_2) \perp u_2 \text{ et } (v_3 + \lambda_1 u_1) \perp u_1$$

d'où

$$\lambda_1 = -\frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \text{ et } \lambda_2 = -\frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2}.$$

Itérativement on détermine tous les u_i .

On a maintenant la récurrence : supposons avoir construit u_1, u_2, \dots, u_{p-1} . On trouve le p -ième élément u_p de la base en posant

$$u_p = v_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u_i$$

et on impose que $u_p \perp u_r$, $r = 1, 2, \dots, p-1$, d'où

$$\lambda_r = -\frac{\langle v_p, u_r \rangle}{\|u_r\|^2}.$$

On montre que les $\{u_i\}$ ainsi engendrés forment une base. il ne reste qu'à les normer en posant $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ pour tout i .

Exemple : Dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique, cherchons à orthogonaliser la base $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ de la base engendrée par ces trois vecteurs.

On commence par prendre $u_1 = v_1 = (1, 1, 0, 0)$. et $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1, 1, 0, 0)}{\sqrt{2}}$

On cherche en suite u_2 orthogonal à u_1 de la forme $u_2 = v_2 + \lambda_1 u_1$ pour un λ_1 bien choisi

$$u_2 \perp u_1 \implies (v_2 + \lambda_1 u_1) \perp u_1$$

\implies

$$\langle v_2, u_1 \rangle + \lambda_1 \|u_1\|^2 = 0 \implies \lambda_1 = -\frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ce λ_1 ainsi calculé donne $u_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1\right)$. et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{\frac{2}{5}} u_2$

On cherche u_3 de la même façon

$$u_3 = v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \text{ avec } u_3 \perp u_1 \text{ et } u_3 \perp u_2$$

et λ_1, λ_2 à trouver, ce qui implique

$$(v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \perp u_i \quad (i = 1, 2)$$

\implies

$$(v_3 + \lambda_2 u_2) \perp u_2 \text{ et } (v_3 + \lambda_1 u_1) \perp u_1$$

d'où

$$\lambda_1 = -\frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} = -\frac{1}{2} \text{ et } \lambda_2 = -\frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} = \frac{1}{5}.$$

Ainsi $u_3 = v_3 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)$ et $e_3 = \frac{u_3}{\sqrt{\frac{12}{5}}}$.

Exercices :

Ex 1 : En utilisant le méthode de Gauss et en discutant suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, décomposer en combinaison linéaire de carrés de formes quadratiques indépendentes, la forme quadratique q définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2\lambda yz + z^2$$

Dans chaque cas on donnera le rang et la signature de q .

Ex 2 : Soit $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

$q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

i) Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q . Calculer $f(X, Y)$ pour X et $Y \in \mathbb{R}^3$.

ii) Vérifier que B_0 est orthogonale pour f , et trouver la matrice A représentant f dans B_0 .

iii) La forme f est elle dégénérée

Ex 3 : Soit $E = \mathbb{C}^2$. Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de E on définit $f(x, y) = x_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1$.

a) Montrer que f est une forme sesquilinéaire sur E .

b) Montrer que f n'est pas une forme hermetienne sur E .

Ex 4 : Soit $E = \mathbb{C}^2$. Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de E on définit $f(x, y) = x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_1$.

a) Montrer que f est une forme hermetienne sur E . Est elle positive ?

b) Déterminer son noyau, est elle dégénérée ?

Ex 5 : On considère \mathbb{R}^3 muni de la structure euclidienne canonique.

a) Déterminer une base de \mathbb{R}^3 , orthonormale pour le produit scalaire et orthogonale relativement à la forme quadratique q définie par $x = (x_1, x_2, x_3)$; $q(x) = x_2x_1 + x_3x_1 + x_2x_3$.

b) Même question pour la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_2x_1 + 4x_3x_1 - 4x_2x_3$

Ex 6 Soit E un espace vectoriel Euclidien de dimension finie et u un opérateur orthogonal sur E . On pose

$$F = \{x \in E, u(x) = x\} \text{ et } G = \{y - u(y), y \in E\}.$$

Montrer que F et G sont des sous espaces supplémentaires et orthogonaux de E .

Ex 7 Soit $E = \mathbb{R}[X]$,

i) $P \in E$, Montrer que

$$\int_0^\infty \exp(-x) P(x) dx$$

est convergente.

ii) Montrer que

$$(P, Q) \rightarrow \int_0^\infty \exp(-x) P(x) Q(x) dx$$

est un produit scalaire sur E .

iii) $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, \dots$ des polynômes obtenus par orthonormalisation des polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$

Montrer que pour tout entier n , il existe un scalaire λ_n tel que

$$Q_n(x) = \lambda_n \exp x \frac{d^n}{dx^n} (\exp (-x) x^n).$$

Chapitre 6

Endomorphismes Particuliers

6.1 Endomorphismes Orthogonaux

On étudiera ici les endomorphismes f d'un espace euclidien qui conservent la norme des vecteurs, c'est à dire $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout x .

Définition 6.1 Soit $f \in \ell(E)$, E un espace euclidien de dimension n . On dit que f est un endomorphisme orthogonal ou une transformation orthogonale si

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Proposition 6.1 Soit $f \in \ell(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i)

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

ii)

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

iii) La matrice A de f dans une base orthonormée vérifie $A^T A = A A^T = I$ (auquel cas $\det A = 1$ ou $\det A = -1$ et A est inversible).

Preuve : Sans difficulté . $i) \implies ii)$ est évident. Pour montrer que $ii) \implies i)$ on utilise la relation entre la norme et le produit scalaire. On montre sans difficulté que $i) \iff iii)$

Exercice : Montrer que A est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormée si et seulement si $A^{-1} = A^T$.

Proposition 6.2 f est orthogonale si et seulement si elle transforme toute base orthonormée en une base orthonormée. (Il suffit qu'une base orthonormée soit transformée en une base orthonormée).

Preuve : On utilise le fait que f , est inversible, transforme une base en une base.

Définition 6.2 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $A^T A = A A^T = I$. Pour n donné, l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est noté $O(n, \mathbb{R})$.

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), A^T A = A A^T = I.\}$$

Cet ensemble a une structure de groupe, c'est à dire :

i)

$$A, B \in O(n, \mathbb{R}) \implies AB \in O(n, \mathbb{R})$$

ii)

$$I \in O(n, \mathbb{R}).$$

iii) $A \in O(n, \mathbb{R}) \implies A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$

On appelle $O(n, \mathbb{R})$ le groupe orthogonal ; cet ensemble est donc l'ensemble des matrices des endomorphismes orthogonaux dans des bases orthogonales. Le sous-ensemble des matrices de $O(n, \mathbb{R})$ dont les déterminants sont égaux à $+1$ est aussi un groupe dit groupe special orthogonal ou aussi groupe des rotations. Ce sous ensemble est noté $SO(n, \mathbb{R})$

Remarque : Dire que $A^T A = A A^T = I$ est équivalent à dire que les colonnes (ou les lignes) de A sont orthonormées, ce qui n'est pas étonnant puisqu'une telle matrice A représente la matrice d'un endomorphisme orthogonal f et f transforme une base orthonormée en une base orthonormée.. On notera que la matrice de passage d'une base orthonormée en une base orthonormée est orthogonale.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

Le groupe orthogonal $O(2, \mathbb{R})$

On s'intéresse ici aux transformations orthogonales f de \mathbb{R}^2 . Pour qu'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de f (dans une base orthogonale) soit orthogonale, il faut que les deux colonnes soient normées

$$a^2 + c^2 = 1, \text{ et } b^2 + d^2 = 1$$

et orthogonales

$$ab + cd = 0.$$

On montre sans difficulté que ces contraintes équivalent aux relations

$$c = \sqrt{1 - a^2}, \quad b = (-1)^{k+1} \sqrt{1 - a^2}, \quad d = (-1)^k a :$$

$$A = \begin{pmatrix} a & (-1)^{k+1}\sqrt{1-a^2}b \\ \sqrt{1-a^2} & (-1)^k a \end{pmatrix}$$

où k prend n'importe quelle valeur entière. Bien sûr il n'y a que deux cas de figures, selon que k est pair ou impair.

Cette forme pour A montre que nécessairement $|a| \leq 1$. On peut donc écrire a sous la forme : $a = \cos \theta$, d'où

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & (-1)^{k+1} \sin \theta \\ \sin \theta & (-1)^k \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ avec } k \text{ pair ou impair.}$$

On remarque que k pair $\implies \det A = 1$; k impair $\implies \det A = -1$.

Proposition 6.3 *Soit $A \in O(2, \mathbb{R})$. Si k est pair, alors $\det A = 1$ et*

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

représente une rotation d'angle θ et de centre O (θ est dit angle non orienté). Si k est impair, alors $\det A = -1$ et

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$.

Le groupe orthogonal $O(3, \mathbb{R})$

Proposition 6.4 *Soit un endomorphisme orthogonal f de matrice orthogonale A dans une base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 . Il existe alors une autre base orthonormée $U = (u_1, u_2, u_3)$ telle que la matrice A' de f dans cette base soit de la forme :*

$$A' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon = 1$ si $\det A = 1$, c'est à dire $A \in SO(3, \mathbb{R})$ et $\varepsilon = -1$ si $\det A = -1$, c'est à dire $A \notin SO(3, \mathbb{R})$.

Endomorphismes (auto)adjoints

Définition 6.3 Soit $f \in \ell(E)$, E un espace euclidien de dimension n . Il existe un et un seul endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

f^* est dit adjoint de f . Si dans une base orthonormée les matrices de f et f^* sont notées A et A^* , respectivement, alors $A^* = A^T$: dans une base orthonormée la matrice de l'adjoint f^* est la transposée de la matrice de f .

Proposition 6.5 Pour tout endomorphisme f sur un espace euclidien E , et pour tout scalaire λ , on a :

- a) $f^{**} = f$; $id^* = id$
- b) $(f + g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$; $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- c) $rg(f) = rg(f^*)$, $\det f^* = \det f$

Preuve : C'est simple dès qu'on se place dans une base orthonormée; dans ce cas les matrices de f et f^* sont A et A^T respectivement.

Comme les matrices orthogonales A vérifient $AA^T = I$, on conclut que les endomorphismes orthogonaux f sont ceux qui vérifient $f \circ f^* = id$.

Définition 6.4 Un endomorphisme f dans un espace euclidien est dit autoadjoint s'il est égal à son adjoint f^* , c'est à dire

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Dans une base orthonormée la matrice A d'un endomorphisme autoadjoint f est égale à sa transposée A^T , d'où A est symétrique. C'est pourquoi un endomorphisme autoadjoint sera également dit symétrique.

Théorème 6.1 Soit f un endomorphisme symétrique. Alors :

- i) Les valeurs propres de f sont toutes réelles.
- ii) f est diagonalisable.
- iii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. On peut donc construire une base orthonormée de vecteurs propres en choisissant une base orthonormée dans chaque espace propre.

En termes de matrices, ces résultats montrent que toute matrice réelle et symétrique est diagonalisable dans \mathbb{R} et les espaces propres sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

Exercices

Ex 1) Montrer que si $A \in O(n, \mathbb{R}) \implies A^{-1} = A^T$ puisque chaque terme de A est égal à son cofacteur si $\det A = 1$, à l'opposé du cofacteur si $\det A = -1$.

Ex 2) Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E .

a) Montrer que $\ker(f - id) = \text{Im}(f - id)^T$.

b) Montrer que si $(f - id)^2 = 0$ alors $\text{Im}(f - id) \subset \ker(f - id)$.

c) Dédurre de a) et b) que si $(f - id)^2 = 0$ alors $f = id$

Ex 3) Vérifier que les deux matrices données ci dessous sont orthogonales, puis donner dans chaque cas l'axe autour duquel se fait la rotation. Préciser la nature de la transformation et donner une matrice de passage entre la base canonique et la base U .

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex 4) Montrer que pour toute matrice carrée on a $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Montrer qu'une matrice A est symétrique si et seulement si il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Bibliographie

- [1] **Roudier, J.-P.** Algèbre linéaire – Cours et exercices corrigés (Dunod) Un classique très pédagogique, avec de nombreux exercices corrigés, adapté au niveau L2.
- [2] **Gourdon, X.** Les Maths en tête – Algèbre (Ellipses) Ouvrage exigeant, riche en exercices et problèmes, idéal pour approfondir la théorie.
- [3] **Monier, J.-P.** Algèbre et Géométrie – Cours et exercices corrigés (Dunod) Couvre l’algèbre linéaire et ses applications géométriques, avec une approche progressive.
- [4] **Liret, F. Martinais, D.** Mathématiques pour le 2e cycle – Algèbre 2 (Dunod) Traite de la réduction des endomorphismes, formes quadratiques, espaces euclidiens et hermitiens.
- [5] **Ramis, E., Deschamps, C. Odoux, J.** Cours de mathématiques spéciales (Masson) Ouvrage complet et rigoureux, souvent utilisé en prépas, couvrant l’ensemble du programme.
- [6] **Calvo, D., Doneddu, A. Vigue, J.-P.** Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes (Cépaduès) Spécialement centré sur la réduction (diagonalisation, Jordan), avec de nombreux exemples.
- [7] **Perrin, D.** Cours d’algèbre (Ellipses) Approche moderne et claire, incluant des chapitres sur les formes quadratiques et les espaces euclidiens.
- [8] **Godement, R.** Cours d’algèbre (Hermann) Un ouvrage profond et théorique, recommandé pour une vision unifiée de l’algèbre linéaire.
- [9] **Kostrikin, A. I.**** – *Introduction à l’algèbre (Mir / Cassini) Livre russe traduit, réputé pour sa rigueur et ses développements sur les formes bilinéaires et quadratiques.
- [10] **Tisseron, C.** Formes quadratiques et géométrie (Hermann) Ouvrage spécialisé sur les formes quadratiques, utile pour approfondir les chapitres 4 et 5 du cours.