

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès



Faculté de Technologie
Département de Génie Civil & Travaux Publics

Polycopié:

HYDRAULIQUE 1

Cours

Niveau : Troisième Année Ingénieurs CCI

Pr. FAHSI Bouazza

Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-Echelles (LMSME)
Département de Génie Civil & Travaux Publics-
Faculté de Technologie
Université Djillalil Liabes de Sidi Bel Abbès
Email professionnel : fahsibouazza@univ-sba.dz
Email Personnel : hbfahti@gmail.com

Année Universitaire 2025-2026

AVANT-PROPOS

Ce polycopié de cours d'Hydraulique répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants du premier semestre de la troisième année universitaire Ingénieurs, option Constructions Civiles et Industrielles (CCI). Ce document couvre le programme du premier semestre de la troisième année de l'Hydraulique appelé « Hydraulique 1 ». Il est constitué de quatre chapitres qui s'enchainent comme suit : Le chapitre I traite l'étude des fluides au repos : **l'Hydrostatique** qui comprend : les Caractéristiques physiques et les propriétés des liquides ; Notion de pression ; Equation fondamentale de l'hydrostatique ; Pression en un point d'une paroi ; Forces de pressions sur les parois

Le chapitre II est consacré à la présentation des **Equations Fondamentales de l'Hydrodynamique** et comprend les points suivants : les Lignes de courant, tube de courant ; Equation de continuité ; Théorème de BERNOULLI ; Phénomène de VENTURI ; Tube de PITOT.

Le chapitre III, porte sur l'étude de la **Dynamique de liquides réels** ; il traite l'Écoulement des liquides ; Les pertes de charge ; Théorème de BERNOULLI généralisé ; Diagramme d'énergie

Enfin le chapitre IV expose l'étude des **régimes d'écoulement dans les conduites, résistances hydrauliques** et qui présente les différents régimes à savoir le Régime laminaire ; le régime turbulent ; le Nombre de Reynolds et enfin le Calcul de pertes de charges, application de l'Equation de MANNING.

Pour la rédaction de ce polycopié, de nombreux documents cités dans la liste bibliographie sont exploités. J'espère que ce polycopié constituera une invitation à la lecture de ces livres.

SEMESTRE	Intitulé de la matière	Coefficient	Crédits	Code
S5	Hydraulique I	4	2	CCI 5.4
VHS	Cours	Travaux dirigés	Travaux Pratiques	
45h00	1h30	1h30	/	

Objectifs de l'enseignement :

Enseigner les bases fondamentales de l'hydraulique.
 Introduire les équations fondamentales de l'écoulement.
 Évaluer la perte de charge.
 Initier les étudiants aux calculs des réseaux hydrauliques.

Connaissances préalables recommandées :

Mécanique des fluides

Contenu de la matière :**Chapitre 1 : Hydrostatique****(3 semaines)**

1. Caractéristique physique et propriétés des liquides
2. Notion de pression
3. Equation fondamentale de l'hydrostatique
4. Pression en un point d'une paroi
5. Forces de pressions sur les parois

Chapitre 2 : Equations Fondamentales de l'Hydrodynamique**(3 semaines)**

1. Lignes de courant, tube de courant.
2. Equation de continuité
3. Théorème de BERNOULLI
4. Phénomène de VENTURI
5. Tube de PITOT

Chapitre 3 : Dynamique de liquides réels**(4 semaines)**

1. Ecoulement des liquides
2. Les pertes de charge
3. Théorème de BERNOULLI généralisé
4. Diagramme d'énergie

Chapitre 4 : Les régimes d'écoulement dans les conduites, résistances hydrauliques**(5 semaines)**

1. Régime laminaire – régime turbulent
2. Nombre de Reynolds
3. Calcul de pertes de charges application de l'Equation de MANNING

Mode d'évaluation:

Examen: 100%.

Références bibliographiques :

1. "Mécanique des fluides et hydraulique (cours et problèmes)" série Schaum.
2. Armando Lencastre, "Hydraulique générale", Edition: Eyrolles.
3. Michel Carlier, "Hydraulique générale et appliquée", Edition: Eyrolles.

Table des matières

Chapitre I : Hydrostatique

Objet de l'Hydraulique	1
I. Définition physique d'un liquide	2
I.1. Caractéristiques physique et propriétés des liquides	2
I.1.1. Propriétés des liquides	2
I.1.1.1. Dispersions	3
I.1.1.2. Suspensions	3
I.1.1.3. Emulsions	3
I.1.2. Caractéristiques physique des liquides	3
I.1.2.1. Masse volumique (spécifique)	4
I.1.2.2. Poids volumique (spécifique)	4
I.1.2.3. Densité (poids spécifique relatif)	4
I.1.2.4. Compressibilité	4
I.1.2.5. Dilatation thermique	5
I.1.2.6. Vitesse de propagation des ondes élastiques	5
I.1.2.7. Tension superficielle –Capillarité	5
a. Tension de surface d'un fluide	5
a.1 Quelques observations simples	5
a.2 Origine de la tension superficielle	5
a.3 Définition de la tension superficielle	6
a.4 Conséquences de l'existence de la tension superficielle	6
a.4.1 Formation de bulles	6
I.1.2.8. Ascension d'un liquide dans un tube capillaire : LOI de JURIN	7
I.1.3. Rhéologie d'un fluide	7
I.1.3.1. Viscosité des fluides	7
I.1.3.2. Expérience de base	8
I.1.3.3. Viscosité dynamique	8
I.1.3.4. Viscosité cinématique	9
I.1.3.5. Variation de la viscosité en fonction de la température	10
I.1.3.6. Les différents types de fluides	11
I.2. Notion de pression	12
I.2.1. Définition de la pression	12
I.2.2. Unité pression	12
I.3. Equation fondamentale de l'hydrostatique	13
I.4. Pression en un point	14
I.4.1. Pression effective et pression absolue	15
I.5. Forces de pression sur les parois	16
I.5.1. Forces de pression sur une plaque plane horizontale	16
I.5.2. Forces de pression sur une plaque plane verticale	16
I.5.3. Forces de pression sur une plaque plane oblique	17
I.5.4. Forces de pression sur une surface courbe	18
I.5.5. Cas général (formule pratique)	19
I.5.6. Centre de poussée	19
Chapitre II : Equations fondamentales de l'Hydrodynamique	
II.1. Ecoulement permanent ou stationnaire	21
II.1.1. Quelques notions de base	21
II.1.1.a. Particule liquide	21
II.1.1.b. Trajectoire et lignes de courant	21
II.2. Equation de continuité ou conservation de la masse	23
II.2.1. Débit masse et débit volume	24
II.2.1.1. Débit masse	24

II.2.1.2. Débit volumique	24
II.2.1.3. Relation entre débit massique et débit volumique	25
II.3. Théorème de Bernoulli	25
II.3.1. Equation de Bernoulli sans échange de Travail	25
II.3.1.1. Autres formes du théorème de Bernoulli	27
II.3.1.2. Equation de Bernoulli avec échange de travail	27
II.4. Phénomène de Venturi	28
II.5. Tube de Pitot	29
Chapitre III : Dynamique des liquides réels	
III.1 Ecoulement des liquides	
III.1.1. Ecoulement permanent	32
III.1.2. Ecoulement non permanent	32
III.2 Pertes de charges	32
III.2.1 Pertes de charges singulières	32
III.2.1.1. Elargissement brusque de section	33
III.2.1.2. Elargissement graduel	34
III.2.1.3. Rétrécissement brusque	35
III.2.1.4. Rétrécissement graduel (conduite conique)	35
III.2.1.5. Tournant d'une conduite	36
III.2.2. Pertes de charges linéaires (réparties)	36
III.2.3 Pertes de charges totales	36
III.3. Théorème de Bernoulli généralisé	38
III.4. Diagramme d'énergie	38
III.4.1. Énergie cinétique	41
III.4.2. Énergie de pression	41
III.4.3. Dissipation visqueuse	41
III.4.4. Énergie interne	41
III.4.5. Représentation dans le diagramme	41
Chapitre IV : Les régimes d'écoulement dans les conduites, résistances hydrauliques	
IV.1. Régime laminaire – régime turbulent	
IV.1.1. Cas de l'écoulement laminaire	
IV.1.1.a. Théorie de l'écoulement laminaire	44
IV.1.1.1.a. Détermination de la loi de résistance hydraulique	44
IV.1.1.b. Cas de l'écoulement turbulent	45
a. Conduites lisses	47
b. Conduites rugueuses	48
IV.2 Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds	50
IV. 3. Calcul de pertes de charges application de l'équation de MANNING	52
IV. 3. 1. Introduction aux pertes de charge	52
IV. 3. 2. Amélioration de la formule de Chézy	52
IV. 3. 2.1. Formule de Manning	52
IV. 3. 2.2. Formule pratique de Manning	53
Applications	54

Liste des figures

Figure I.1. Formation du ménisque	5
Figure I.2. Origine de la tension superficielle	6
Figure I.3. Ascension d'un liquide	7
Figure I.4. Ecoulement d'un fluide entre deux plaques	8
Figure I.5. Comportement de l'écoulement d'un fluide entre deux plaques	9
Figure I.6. Variation de la viscosité en fonction de la température	10
Figure I.7. Différents types de fluides newtoniens et non newtoniens	11
Figure I.8 : Force de pression en équilibre des liquides	12
Figure I.9. Un VER en équilibre	13
Figure. I.10 : Pression en un point d'un liquide au repos	14
Figure I.11. Forces de pression sur une plaque plane horizontale	16
Figure I.12. Forces de pression sur une plaque verticale	16
Figure I.13: Force exercée par un fluide sur une paroi solide fixe	17
Figure I.14. Forces de pression sur une surface oblique	18
Figure II.1 : Trajectoire d'une particule liquide	21
Figure II.2 : Ligne de courant	22
Figure II.3 : Veine liquide (tube de courant)	22
Figure II.4 : Section d'écoulement	22
Figure II.5 : écoulement en régime stationnaire dans une canalisation	23
Figure II.6. Débit volumique à travers une conduite	24
Figure II.7. Écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible	25
Figure II.8. Distribution des hauteurs d'énergie le long d'une conduite	26
Figure II.9. Ecoulement avec machine hydraulique	27
Figure II.10. Tube de Venturi	28
Figure I.11. Tube de Pitot	30
Figure III.1. Ecoulement permanent	32
Figure III.2. Ecoulement non permanent	32
Figure III.3. Perte de charge	39
Figure III.4. Diagramme d'énergie	42
Figure III.4. Diagramme de Moody	43
Figure IV.1. Ecoulement laminaire	45
Figure IV.2. Ecoulement turbulent à travers des sections rugueuses	48
Figure IV.3. Expérience de Reynolds	50

Liste des tableaux

Tableau N°I.1. Propriétés approximatives de certains fluides courants à 20 °C	10
Tableau N° I.2. Moments d'inertie de quelques surfaces particulières	20
Tableau N° III.1. Valeurs moyennes de K	33

Chapitre I : Hydrostatique

Objectifs

Au terme de ce chapitre, l'étudiant devra être capable de :

- Définir les différents types de fluides ;
- Identifier et interpréter les principales propriétés physiques d'un fluide ;
- Écrire et utiliser l'équation de continuité ;
- Calculer les débits massiques et volumiques ;
- Appliquer le théorème de Bernoulli dans des situations simples et complexes.

Chapitre I : Hydrostatique

Introduction :

Objet de l'Hydraulique :

L'Hydraulique est une branche appliquée de la mécanique des fluides qui a pour objet l'étude des lois de l'équilibre et du mouvement des liquides en vue de leurs applications à l'art de l'ingénieur.

Les formules que l'hydraulique établit sont utilisées dans les domaines suivants :

- Conception et Construction des barrages et les murs des réservoirs ;
- Etablissement des conduites de distribution et d'évacuation des eaux (de différents types ; usées, ménagères, pluviales, etc.....) ;
- Construction de canaux de navigation et d'irrigation ;
- Installation d'ouvrages destinés à la production de l'énergie hydraulique (centrales hydroélectriques)
- Calcul des machines hydrauliques

Ainsi, l'**Hydraulique** s'occupe principalement des courants liquides dirigés et limités par des parois solides, c. à. d : les écoulements dans les canaux découverts et les conduites sous pression.

Les méthodes employées actuellement en hydraulique pour étudier les mouvements des liquides sont basées sur la mécanique théorique. Les résultats théoriques sont ensuite comparés aux données expérimentales ; après quoi, on détermine le degré d'écart pour procéder à la correction et la vérification des formules théoriques pour les rendre applicables en pratique.

L'**Hydraulique** traite d'une façon purement expérimentale un certain nombre de phénomènes qui sont difficilement analysables théoriquement du fait de leur complexité, ce qui lui donne l'aspect d'une science semi-empirique.

L'Hydraulique comprend :

- L'**Hydrostatique** : elle étudie les conditions d'équilibre des liquides ;
- L'**Hydrodynamique** : qui recherche les lois théoriques du mouvement des liquides ;

En fin, l'**Hydraulique** : **qui consiste dans l'étude des lois réelles des écoulements des liquides en vue de leurs applications pratiques. Cette étude est basée sur la théorie et l'expérimentation directe.**

Définition physique d'un liquide :**Notion de fluide :**

Elle comprend tous les corps qui sont caractérisés par leur fluidité, c.à.d par leur capacité de changer de forme sous l'action des forces les plus faibles.

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel **continu, déformable**, sans rigidité et qui **peut s'écouler**.

_ **Continu** ; ses propriétés varient d'une façon continue, propriétés considérées comme caractéristiques non d'un point sans volume mais d'une particule, volume de fluide extrêmement petit autour d'un point géométrique ; par exemple, on affecte à chaque point P, pour chaque instant t, une masse volumique ρ représentative de la population des molécules intérieures au volume (dV) de la particule ;

_ **Déformable** (il n'a pas de forme propre) ; les molécules peuvent facilement glisser les unes sur les autres ; cette mobilité fait que le fluide prendra la forme du récipient qui le contient ;

_ **Qui peut s'écouler** ; mais tout fluide peut s'écouler plus ou moins facilement d'un récipient à un autre ou dans une conduite : des forces de frottements qui s'opposent au glissement des particules de fluide les unes contre les autres peuvent apparaître car tout fluide réel a une viscosité.

D'où, un liquide est caractérisé par le fait qu'en petites quantités, il prend une forme sphérique et qu'en grandes quantités, il forme une surface libre et se moule exactement suivant le contour du récipient qui le contient. Les liquides sont considérés habituellement comme étant incompressibles, quoique en général ils ne le sont pas.

Par suite de sa fluidité (mobilité de ses particules), un liquide ne peut pas être soumis à des forces concentrées et ne peut résister qu'à des forces réparties d'une façon continue dans sa masse (forces massiques) ou bien à sa surface (forces superficielles)

I.1. Caractéristiques physique et propriétés des liquides**I.1.1. Propriétés des liquides : matière divisée (Dispersion, suspensions, émulsions)**

Un fluide n'est jamais à l'état purement liquide ou gazeux, sa composition est en réalité un mélange de différentes matières dont l'une d'entre elles est principale et contenant les autres qui peuvent être à des proportions différentes. Un fluide peut être à deux phases coexistant en

équilibre thermodynamique ou en état pur en présence de particules en bulles de gaz, en gouttelettes ou en corps solides avec existence d'interfaces multiples entre la phase continue (liquide) et la phase dispersée (particules).

I.1.1.1 Dispersions :

Les dispersions sont des mélanges de particules très fines de taille inférieure à un μm . Ces particules sont souvent de forme colloïdale comme les argiles. Les dispersions ne sédimentent pas seules et ne peuvent pas être filtrées mais elles forment des mélanges chimiquement très sensibles à ce qui peut modifier la nature de leurs interactions. Une modification simple de propriété d'une solution peut affecter complètement le comportement inter-facial des particules, provoquant des variations brutales de comportement du mélange, par exemple, l'ajout de sel à un gel de cheveux peut le liquéfier.

I.1.1.2 Suspensions

Les suspensions sont des mélanges de particules fines ou grosses de tailles supérieures à $1\mu\text{m}$, généralement sans interaction entre elles. A l'inverse des dispersions, les suspensions sédimentent à des vitesses qui dépendent de la taille des particules et des conditions de dépôt et peuvent être filtrées mécaniquement. Les suspensions sont généralement peu sensibles aux variations chimiques du liquide. Le transport en suspension de particules fines (sable, limon, silt) peut se faire dans un cours d'eau.

I.1.1.3 Emulsions

Le mélange de deux substances liquides en gouttelettes forme une émulsion. La plupart des liquides sont non miscibles. Le lait ou la mayonnaise sont des exemples d'émulsion de globules de graisse dans une phase aqueuse. La stabilité des émulsions est un problème important (coalescence des gouttelettes, séparation des phases). Les mousses sont des cas particuliers d'émulsion où les gouttelettes sont des bulles de gaz. Les chutes d'eau dans les cascades et l'écume des vagues sont des émulsions d'air dans de l'eau. Le phénomène de cavitation dans les conduites peut mener à la formation d'émulsions.

I.1.2 Caractéristiques physique des liquides

Tous les liquides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques on a : la masse volumique, la densité et la compressibilité.

I.1.2.1. Masse volumique (spécifique)

La masse volumique ou masse spécifique est la masse de l'unité de volume du corps considéré. Si m est la masse d'un volume V du liquide, la masse volumique s'écrit :

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volume}} = \frac{M}{V} [\text{Kg}/\text{m}^3]$$

I.1.2.2. Poids volumique (spécifique) :

C'est le poids de l'unité de volume du liquide considéré :

$$\gamma = \frac{G}{W}$$

Avec : G : poids du liquide

W : son volume

Pour l'eau à 4°C : $\gamma = 9810 \text{ N}/\text{m}^3 \approx 10^4 \text{ N}/\text{m}^3 \approx 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$

Le **poids spécifique** représente la force de gravité agissant sur la masse par unité de volume. il s'écrit :

$$w = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g$$

En [N/m³] avec g l'accélération de la gravité.

I.1.2.3. Densité (poids spécifique relatif)

La densité est donc une grandeur adimensionnelle. Elle est définie comme étant le rapport du poids (masse) volumique du fluide au poids (masse) volumique de l'eau à 4°C :

$$d = D = \frac{\gamma_{\text{liquide}(\text{fluide})}}{\gamma_{\text{eau}}} = \frac{\rho_{\text{liquide}}}{\rho_{\text{eau}}}$$

I.1.2.4. Compressibilité

La faculté d'un liquide de pouvoir changer son volume sous l'action d'une pression est caractérisée par le coefficient de compressibilité (β_p) qui représente une variation relative de volume rapportée à l'unité de pression

Le coefficient de compressibilité (β_p) est défini par :

$$\beta_p = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dP} [\text{bar}^{-1}] \text{ ou } [\text{Pa}^{-1}]$$

L'inverse du coefficient de compressibilité est appelé : coefficient d'élasticité K, aussi appelé module de compressibilité, avec :

$$K = \frac{1}{\beta_p} = -\frac{V \cdot dP}{dV} [\text{bar}] \text{ ou } [N/m^2]$$

I.1.2.5. Dilatation thermique :

Elle est caractérisée par le coefficient (β_t) qui représente une variation relative de volume correspondant à une augmentation de la température de 1°C et on note :

$$\beta_t = +\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dT} [^{\circ}\text{C}^{-1}]$$

I.1.2.6. Vitesse de propagation des ondes élastiques C :

C'est la vitesse de propagation d'une variation de pression dans un liquide

$$C = \sqrt{K/\rho} = \sqrt{\eta} [m/s]$$

Pour l'eau à 10°C, C= 1425m/s

I.1.2.7. Tension superficielle -Capillarité :

a. Tension de surface d'un fluide

a.1 Quelques observations simples

La surface libre d'un liquide est plane et horizontale pourtant si l'on regarde la surface libre d'un liquide à l'intérieur d'un tube transparent (burette, tube à essai, pipette ...) on remarque la formation d'un "ménisque".

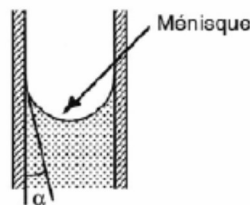


Figure I.1. Formation du ménisque

Toutes ces observations montrent que la surface de séparation entre deux fluides se comporte comme une sorte de membrane élastique.

a.2 Origine de la tension superficielle

Si l'on considère une molécule au sein d'un liquide, elle est soumise à des forces intermoléculaires d'attraction exercées par les molécules voisines. La résultante de ces forces est nulle en moyenne. Pour une molécule proche de la surface de séparation liquide/air, cette résultante n'est plus nulle (puisque'il y a dissymétrie dans la répartition des molécules autour d'une molécule donnée) et elle est dirigée vers l'intérieur du liquide, perpendiculairement à la surface de séparation. Cette couche agit donc comme une membrane qui comprime en quelque sorte le liquide.

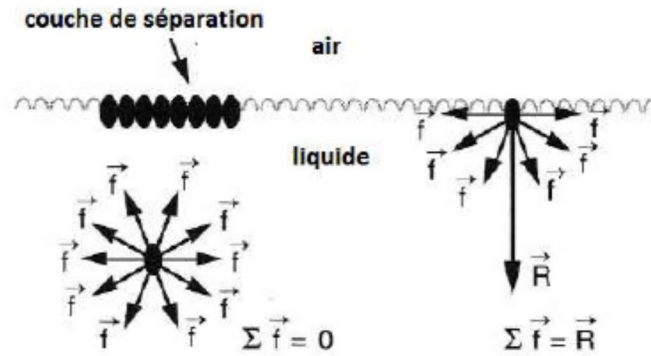


Figure I.2. Origine de la tension superficielle

a. 3. Définition de la tension superficielle

Prenons l'exemple d'une bulle d'eau savonneuse, elle peut être comparée à un ballon en caoutchouc : pour augmenter sa taille, donc sa surface, il faut fournir un certain travail, une certaine énergie ΔW qui est proportionnelle à l'augmentation de la surface ΔS .

Le coefficient de proportionnalité est appelé tension superficielle et notée " σ ".

La définition de la tension superficielle est donc donnée par la relation :

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}$$

Pour simplifier encore, imaginons une surface rectangulaire dont l'un des côtés a une longueur L . Pour augmenter la surface de ΔS , il faut exercer sur ce côté L une force d'intensité F .

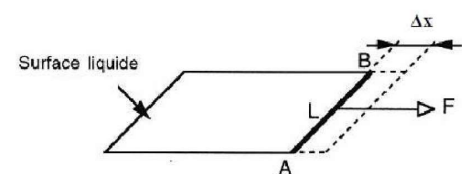
Le côté se déplaçant de Δx , la surface augmente de : $\Delta S = L \Delta x$.

Le travail de la force \mathbf{F} est :

$$\Delta W = F \Delta x.$$

On peut donc écrire que :

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F \cdot \Delta X}{L \cdot \Delta X} = \frac{F}{L}$$



Situation simplifiée illustrant la définition de la tension superficielle :

$$\sigma = \frac{F}{L}$$

Unité de la tension superficielle :

La première formule de définition indique que la tension superficielle est donnée en J.m^{-2} , mais en pratique, c'est la deuxième formule qui sert de référence, l'unité de tension superficielle est donc officiellement le N.m^{-1} .

a. 4. Conséquences de l'existence de la tension superficielle

a.4.1 Formation de bulles

Dans tous les cas de formation de bulles il faut que la pression à l'intérieur de la bulle soit plus grande que la pression à l'extérieur de la bulle. On peut démontrer que la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur est donnée par la relation suivante :

$$P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{2\sigma}{R} \quad (R = \text{rayon de la bulle en m})$$

I.1.2.8. Ascension d'un liquide dans un tube capillaire : LOI de JURIN

Lorsqu'on plonge un tube fin et ouvert dans un liquide, celui-ci "monte" dans le tube d'une certaine hauteur h . Il se forme également un ménisque. Au contact de la paroi, une force due à la tension superficielle s'exerce sur le liquide verticalement vers le haut. Cette force s'oppose au poids de la colonne de liquide au-dessus de la surface libre du liquide. Puisqu'il y a équilibre, on peut écrire la relation suivante :

$$2\pi \cdot r \cdot \sigma \cdot \cos \theta = \pi r^2 \cdot h \cdot \rho \cdot g$$

Avec

σ tension superficielle [N/m]

r rayon du capillaire [m]

ρ masse volumique [kg/m³]

θ angle de raccordement [rad]

h hauteur de l'ascension capillaire [m]

Donc :

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos \theta}{r \cdot \rho \cdot g}$$

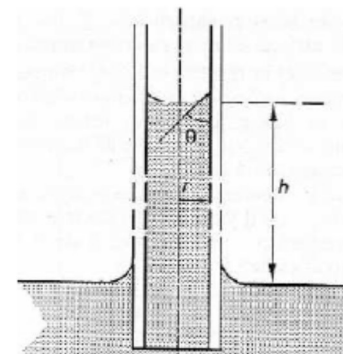


Figure I.3. Ascension d'un liquide

Cette relation est appelée Loi de Jurin.

Dans le cas où le liquide mouille parfaitement la paroi du capillaire, l'angle de raccordement est nul (c'est le cas de l'eau dans un capillaire en verre propre). La loi de Jurin est encore plus simple :

$$h = \frac{2\sigma}{r \cdot \rho \cdot g}$$

Donc l'ascension capillaire est d'autant plus importante que le tube est fin et que la masse volumique du liquide est faible.

I.1.3. Rhéologie d'un fluide

La rhéologie est une branche de la physique qui étudie l'écoulement ou la déformation des corps sous l'effet des contraintes qui leur sont appliquées, compte tenu de la vitesse d'application de ces contraintes ou plus généralement de leur variation au cours du temps.

I.1.3.1 Viscosité des fluides

La viscosité se définit comme la résistance d'un fluide à sa mise en mouvement. Cette résistance est due principalement à l'interaction entre les molécules du fluide. Certains liquides coulent facilement, comme l'eau et l'alcool éthylique ; ils sont relativement peu visqueux. D'autre, par contre, comme les huiles épaisses, la glycérine et la mélasse, sont très visqueuses et résistent davantage à l'écoulement. Dans le cas des gaz, la résistance à l'écoulement est particulièrement faible à cause de leur cohésion minimale.

I.1.3.2 Expérience de base

L'expérience représentée ci-dessous peut être réalisée simplement en prenant du miel au de l'huile pour boîte de vitesse).

On met un fluide entre deux plaques (l'une fixe, l'autre mobile) et l'on étudie la force F qu'il faut appliquer pour déplacer la plaque mobile à une vitesse constante U .

On fait varier l'épaisseur e de liquide et aussi la surface S de la plaque mobile.

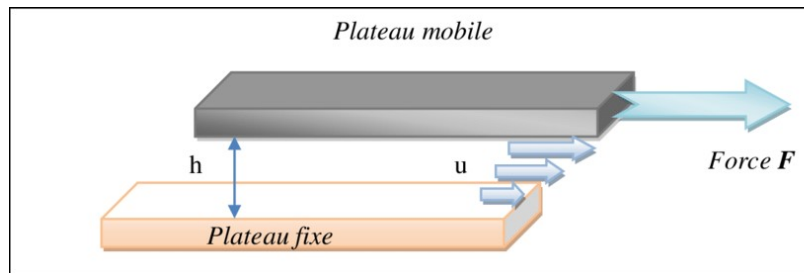


Figure I.3. Ecoulement d'un fluide entre deux plaques

L'expérience montre que F est proportionnel à U et S , mais inversement proportionnel à l'épaisseur h du liquide.

I.1.3.3. Viscosité dynamique

Les observations qui découlent de l'expérience décrite ci-dessus peuvent être traduites par une expression mathématique de la forme suivante :

$$F = \mu.S.\frac{U}{h}$$

Le coefficient de proportionnalité (μ) qui apparaît dans cette relation est appelé coefficient de viscosité dynamique.

Dans le Système International, la viscosité dynamique, (μ), a pour unité : [Kg/m.s] ou [Pa.s].

Dans le système CGS, l'unité est le poise [PI] où 1poise=1[g/cm.s].

Remarque : En fait, lorsqu'un fluide s'écoule entre deux plaques ou dans un conduit, on peut modéliser la situation de la façon suivante : on imagine le liquide formé de couches très fines et parallèles d'épaisseur Δy (on prend un axe Oy perpendiculaire à la direction de la vitesse d'écoulement), entre deux couches successives il y a une différence de vitesse de déplacement

notée ΔU . Une force ΔF dite de cisaillement est nécessaire pour maintenir cette différence de vitesse.

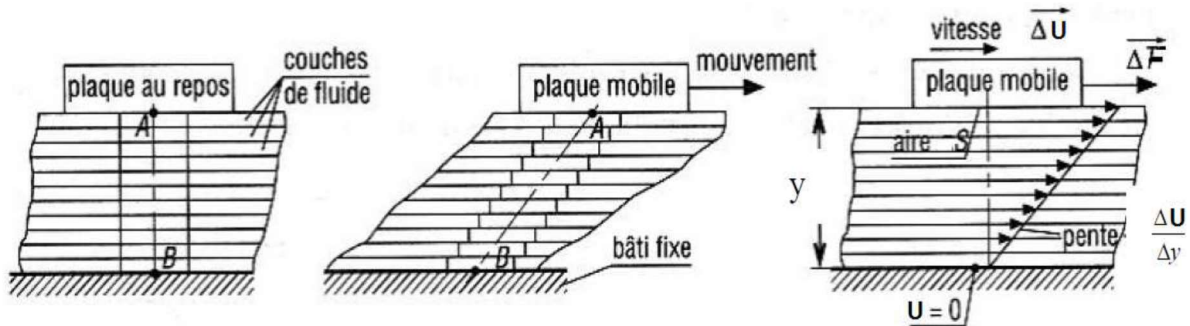


Figure I.4. Comportement de l'écoulement d'un fluide entre deux plaques

On suppose que pour ce modèle on peut appliquer la même relation que celle tirée de l'expérience précédente :

$$\Delta F = \mu \cdot S \cdot \frac{\Delta U}{\Delta h}$$

Le rapport $\frac{\Delta U}{\Delta y}$ est la variation de vitesse perpendiculairement à la direction d'écoulement, on

l'appelle aussi gradient de vitesse ou le taux de cisaillement.

Comme il est difficile de connaître la surface S qui subit la force de cisaillement, on préfère introduire la notion de contrainte de cisaillement τ en $[\text{N}\cdot\text{m}^{-2}]$:

$$\tau = \frac{F}{S}$$

Donc :

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

N.B: On rencontre parfois le terme de viscosité relative, μ_r : c'est un nombre sans dimension qui est définie par le rapport de la viscosité dynamique d'un fluide (viscosité absolue) à la viscosité d'un fluide de référence μ_0 :

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

I.1.3.4. Viscosité cinématique

La viscosité cinématique, (η) , est définie comme étant : la viscosité dynamique sur la masse volumique. Elle est exprimée comme suit :

$$\eta = \frac{\mu}{\rho}$$

La viscosité cinématique, η , a pour unité dans le système SI : $[\text{m}^2/\text{s}]$; dans le système CGS, l'unité est le stokes ou 1 stokes = 1 $[\text{cm}^2/\text{s}]$.

À titre d'exemple, les valeurs de viscosité dynamique et cinématique pour quelques fluides à la température ambiante (20 °C) sont :

Tableau N° I.1. Viscosité cinématique et Dynamique de quelques fluides

Fluide	Viscosité dynamique μ [PI]	Viscosité cinématique ν [m ² /s]
glycérine	0,8	$6,8 \cdot 10^{-4}$
Huile	0,3	$4 \cdot 10^{-4}$
Alcool	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
Eau	10^{-3}	10^{-6}
Air	$18 \cdot 10^{-6}$	$15 \cdot 10^{-6}$

D'une manière générale, la viscosité dynamique μ des liquides est beaucoup plus grande que celle des gaz, mais leur viscosité cinématique η peut être inférieure car les gaz ont une faible masse volumique.

I.1.3.5. Variation de la viscosité en fonction de la température

Dans le cas des gaz, une augmentation de la température entraîne un mouvement plus intense des molécules et accroît le mélange moléculaire et donc la viscosité augmente. Dans le cas d'un liquide, lorsque la température augmente les molécules se séparent entre elles, décroissant l'attraction entre elles et donc la viscosité diminue. La relation entre la température et la viscosité est par conséquent inversée pour un gaz et un liquide.

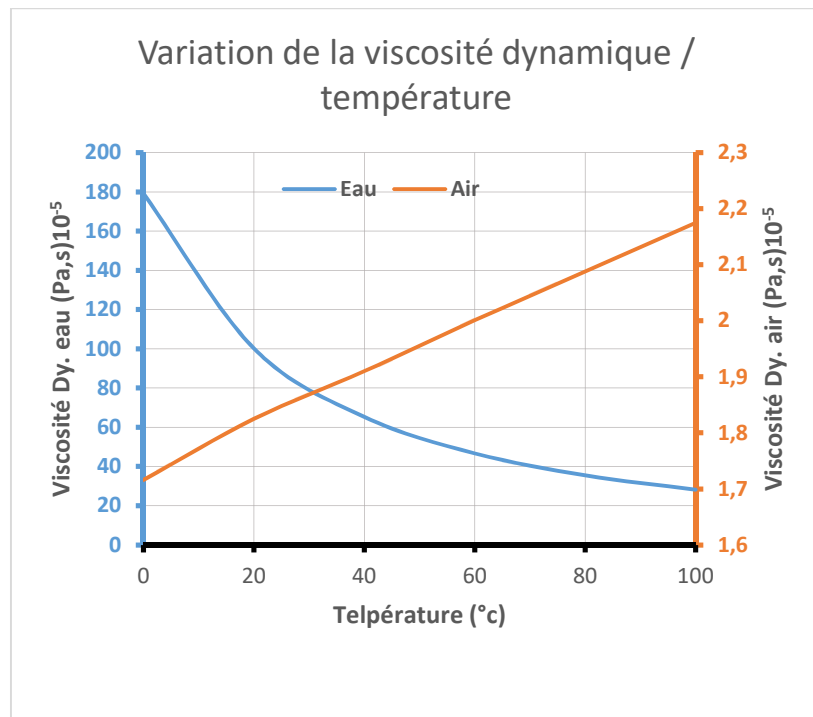


Figure I.5. Variation de la viscosité en fonction de la température

I.1.3.6 Les différents types de fluides

Les fluides peuvent être classés en trois grandes familles :

- les fluides viscoélastiques (par ex. : farines de blé, poudres diverses).
- les fluides dont les caractéristiques varient plus ou moins rapidement en fonction du temps (peintures, solution de plâtre...).
- les fluides dont les caractéristiques sont stables. Ces fluides peuvent présenter différents comportements caractérisés par la relation entre la contrainte de cisaillement (τ) et le gradient de vitesse (dU/dy) comme l'indique le tableau ci-dessous :

Deux grandes familles de fluides :

Les fluides **newtoniens** pour lesquels la viscosité μ ne dépend pas de la contrainte de cisaillement τ (ni du gradient de vitesse). Le graphe est donc une droite. C'est le cas des gaz, vapeurs, liquides purs, liquides de masse molaire faible, solutions peu concentrées... ;

Les fluides **non-newtoniens** pour lesquels μ dépend de la contrainte de cisaillement τ .

Le tableau ci-dessous montre la grande variété des réactions possibles. C'est le cas des polymères, des purées, des gels, des boues, des pâtes, du sang, des peintures...).

L'étude des propriétés de ces fluides constitue le domaine de la rhéologie.

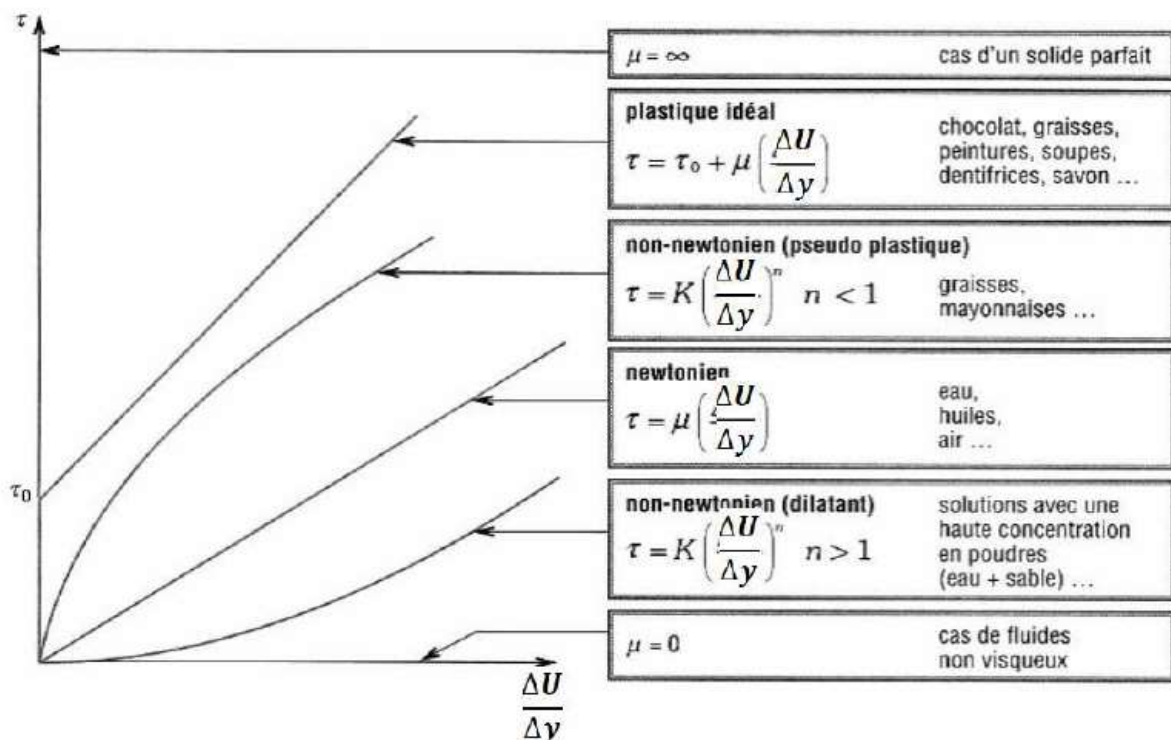


Figure I.6. Différents types de fluides newtoniens et non newtoniens

I.2. Notion de pression

I.2.1. Définition de la pression

La pression est définie comme la force exercée par un fluide par unité de surface.

Examinons un corps liquide de volume donné contenu dans un réservoir comme indiqué sur la figure (II.1) et divisons-le en deux parties par un plan vertical (B-B). Rejetons mentalement une partie et remplaçons son action par la force (F) appelée force de pression (force de surface).

Supposons que la force (F) agissant sur la section rectangulaire (A) définie par (abcd) a une direction arbitraire, c. à d : $F = F_x + F_y$, avec F_x et F_y sont respectivement la composante normale et la composante tangentielle au plan de section.

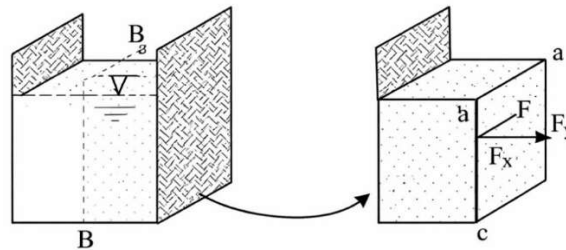


Figure I.7 : Force de pression en équilibre des liquides

Comme le liquide ne résiste pas pratiquement aux forces tangentielles qui apparaissent uniquement lorsqu'il y'a un mouvement relatif entre les particules liquides, l'équilibre sera rompu sous l'action de la force F_y . Donc, en cas de repos F_y est nulle et F_x coïncide avec F .

Le liquide peut conserver son état d'équilibre uniquement dans le cas où la force de pression hydrostatique est dirigée suivant la normale intérieure de la surface d'action.

La pression moyenne (p) exercée par la force (F) par unité de surface (A) est définie par l'expression :

$$P = \frac{F}{A} \left(N/m^2 = Pa \text{ dit pascal} \right)$$

La limite de ce rapport à la diminution de la surface (A) jusqu'à zéro exprime la pression hydrostatique au point donné :

$$P = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A}$$

I.2.2. Unité pression

Dans le système international (SI), une pression s'exprime en Newton par mètre carré (N/m^2), également appelé Pascal (Pa). Cette unité est la seule qui a une valeur légale, et la seule utilisée avec rigueur par la communauté scientifique.

Autres unités de pression :

On rencontre aussi des unités de pression anciennes (mais encore utilisées parfois), ou d'usage particulier à certaines disciplines :

- Le bar, vaut $10^5 \text{ Pa} = 100 \text{ kPa}$
- L'atmosphère (atm), vaut environ 1 bar : $1 \text{ atm} = 1.01325 \text{ bar} = 101.325 \text{ kPa}$
- Le mètre de colonne d'eau (mCE), égal à la pression qui règne sous un mètre d'eau sous gravité terrestre, vaut 9810 Pa
- Le millimètre de mercure (mmHg), vaut 133 Pa

I.3. Equation fondamentale de l'hydrostatique

Si on considère le cas général de l'équilibre d'un liquide. Parmi les forces massiques pouvant s'exercer sur le liquide n'agit que la pesanteur (son poids propre).

Supposons que le liquide est contenu dans un récipient et que sa surface libre est exposée à la pression atmosphérique (P_0).

Soit un petit élément cylindrique vertical de surface horizontale (dS) et de hauteur (h).

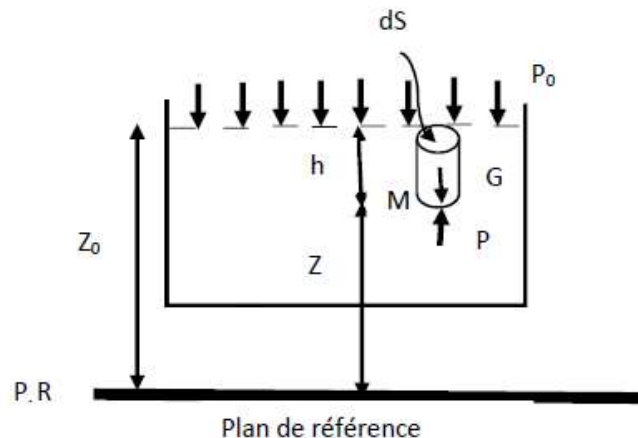


Figure I.8. Un VER en équilibre

Les conditions d'équilibre donnent :

$$\begin{aligned}
 P_0.dS - P.dS + G &= 0 \\
 \Rightarrow P_0.dS - P.dS + \gamma.h.dS &= 0 \quad (***) \\
 \Rightarrow P &= P_0 + \gamma.h
 \end{aligned}$$

Cette équation est appelée **Equation ou loi fondamentale de l'Hydrostatique (EFH)**. Cette équation permet de calculer la pression en n'importe quel point d'un fluide (liquide) au repos.

Si on remplace (h) par $(z_0 - z)$ dans (***), on obtient :

$$\begin{aligned}
 P &= P_0 + \gamma.(z_0 - z) \\
 \Rightarrow P &= P_0 + \gamma.z_0 - \gamma.z \\
 \Rightarrow P + \gamma.z &= P_0 + \gamma.z_0 \\
 \Rightarrow \frac{P}{\gamma} + z &= \frac{P_0}{\gamma} + z_0 \\
 \Rightarrow \frac{P}{\gamma} + z &= \text{Constante}
 \end{aligned}$$

Sachant que :

z : hauteur de position ou cote

$\frac{P}{\gamma}$: Hauteur piézométrique

$H = \frac{P}{\gamma} + z$: Hauteur de charge totale (la charge totale en n'importe quel point d'un liquide au repos est toujours constante)

I.4. Pression en un point :

- La pression est toujours dirigée suivant la normale intérieure vers la surface d'action.
- Dans un liquide au repos, la pression est indépendante de la direction. Pour démontrer cette propriété, considérons un réservoir plein de liquide dont la surface libre est exposée à la pression atmosphérique comme le montre la figure (II.2), et prenons un élément (un point) du liquide à une profondeur quelconque. On suppose que cet élément est petit prisme triangulaire de largeur (dy). Supposons que ce liquide exerce une pression (P_x) sur la surface ($dz \cdot dy$), une pression (P_z) sur la surface ($dx \cdot dy$) et une certaine pression (P_s) sur la surface ($ds \cdot dy$) de l'élément

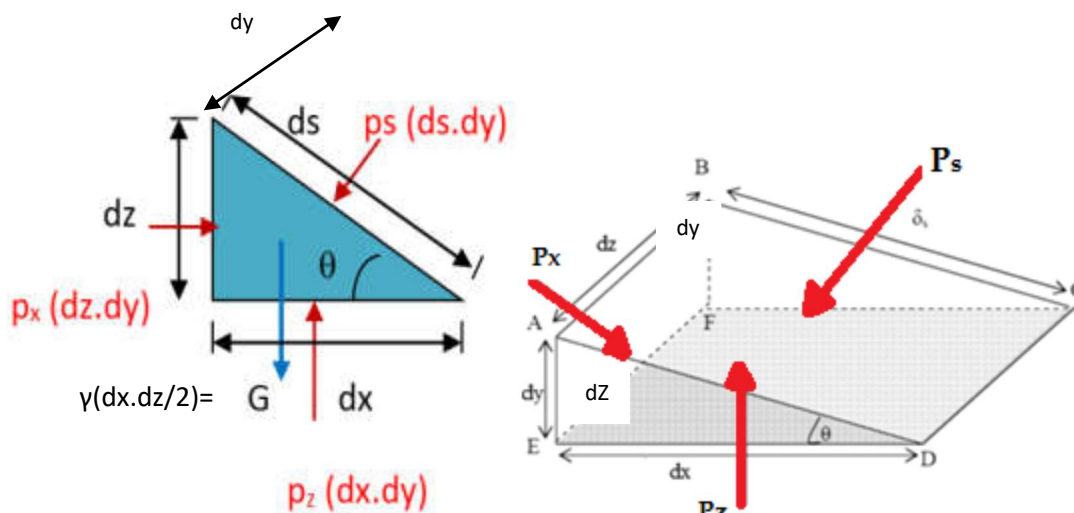


Figure. I.9 : Pression en un point d'un liquide au repos

En équilibre statique, la somme des forces dans les directions x et z est égale à zéro :

a) Dans la direction horizontale (x) :

$$\Sigma \vec{F}_{Ox} = \vec{0} \Rightarrow F_x - F_s \cdot \sin \theta = 0 \Rightarrow P_x (dz \cdot dy) - [P_s (ds \cdot dy)] \cdot \sin \theta = 0$$

D'où :

$$P_x (dz) - P_s (ds) \cdot \sin \theta = 0$$

Et sachant que :

$$(ds) \cdot \sin \theta = dz \Rightarrow P_x \cdot dz - P_s \cdot dz = 0$$

On obtient :

$$P_x = P_s \quad (*)$$

b) Dans la direction verticale (z) :

$$\Sigma \vec{F}_{Oz} = \vec{0} \Rightarrow F_z - F_s \cdot \cos \theta - G = 0 \Rightarrow P_z(dx \cdot dy) - [P_s(ds \cdot dy)] \cdot \cos \theta - \gamma \frac{(dx \cdot dz)}{2} \cdot dy = 0$$

D'où :

$$P_z(dx) - P_s(ds) \cdot \cos \theta - \gamma \frac{(dx \cdot dz)}{2} = 0$$

$$\text{Et sachant que : } dS \cdot \cos \theta = dx \Rightarrow P_z dx - P_s \cdot dx - \gamma \frac{dx \cdot dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow P_z - P_s - \gamma \frac{(dz)}{2} = 0$$

Et si l'on réduit l'élément de volume à un point, c'est-à-dire (dz) tend vers zéro, on obtient :

$$P_z = P_s \quad (**)$$

Des équations (*) et (**), on obtient :

$$P_x = P_z = P_s$$

Par conséquent, **Théorème de Pascal** : la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos, est la même (agit de façon égale) dans toutes les directions. C'est la deuxième propriété de la pression hydrostatique.

I.4.1. Pression effective et pression absolue :

- Si le liquide est au repos, la pression est appelée **pression hydrostatique**
- Si elle est comptée à partir de zéro, on a affaire à **la pression absolue** ;
- Si elle est comptée à partir de la pression atmosphérique, on a affaire à **la pression effective (relative)**

$$\text{Soit : } P_1 = P_2 + \rho g h \dots \dots \dots EFH$$

$$\text{Si : } P_2 = P_{\text{atmosphérique}} \Rightarrow P_1 = P_{\text{atm}} + \rho g h \dots (\text{pression absolue})$$

- **La pression absolue est la pression réelle mesurée par**

Rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière).

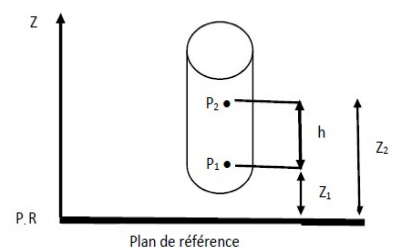
Elle est toujours positive.

$$\text{Si : } P_1 = \rho g h \dots \dots \dots (\text{pression relative})$$

- **La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure : cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.**

Donc : Pression absolue = Pression relative (effective) + Pression atmosphérique

Ou bien : Pression relative (effective) = Pression absolue - Pression atmosphérique



I.5. Forces de pression sur les parois

La poussée hydrostatique sur une paroi provient des forces de pressions du fluide agissant sur cette surface.

La caractérisation de la pression du fluide sur la surface dépend de:

- Force de poussée hydrostatique (\vec{F}) : Les forces élémentaires (dF), exercées sur la paroi, sont toutes parallèles et admettent donc une résultante (\vec{F}) normale à la paroi.
- Centre de poussée (D) : C'est le point d'application de la résultante de la force de poussée (\vec{F}) sur la surface de contact S.
- Le barycentre (C) : C'est le centre de gravité de la surface immergée de la paroi.

I.5.1. Forces de pression sur une plaque plane horizontale

Considérons un réservoir ouvert à l'air libre de sa surface supérieure, de surface de base S, contenant une hauteur h de liquide de masse volumique ρ .

Sur une surface horizontale, la pression est uniforme sur toute la surface $P = \rho.g.h$, alors :

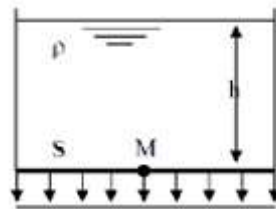


Figure I.10. Forces de pression sur une plaque plane horizontale

$$F = \int P.dS = \int (\rho.g.h).dS$$

$$\Rightarrow F = \rho.g.h.\int dS \quad \text{D'où : } F = \rho.g.h.S$$

La force de pression appliquée sur une paroi horizontale, est égale au poids d'une colonne liquide verticale.

I.5.2. Forces de pression sur une plaque plane verticale

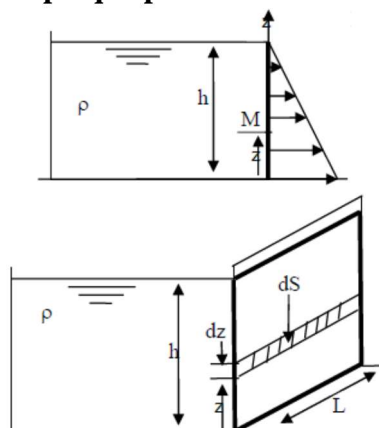


Figure I.11. Forces de pression sur une plaque verticale

La force de pression en un point M quelconque de la surface verticale S d'épaisseur L est :

$$F = \int dF = \int P.dS$$

Où : $dF = \rho \cdot g \cdot z \cdot dS$ et $dS = L \cdot dz$

$$F = \int \rho \cdot g \cdot z \cdot L \cdot dz \Rightarrow F = \rho \cdot g \cdot L \int_0^h z \cdot dz$$

Alors :

$$\Rightarrow F = \rho \cdot g \cdot L \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h$$

D'où : $F = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{h^2}{2}$ et $S = L \cdot h$ Donc : $F = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{h^2}{2} = \rho \cdot g \cdot L \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \rho \cdot g \cdot S \cdot \frac{h}{2}$

I.5.3. Forces de pression sur une plaque plane oblique

Soit une paroi AB de surface S plane de forme quelconque immergée dans un liquide ρ et inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale et C son barycentre.

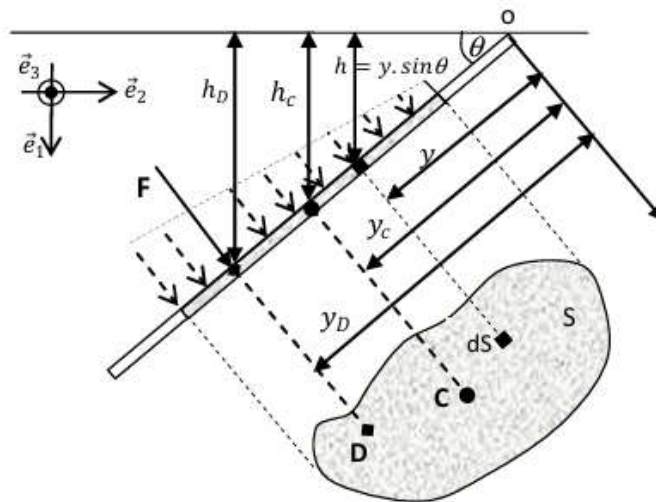


Figure I. 12: Force exercée par un fluide sur une paroi solide fixe
Soit un élément de surface (dS)

Considérons la force élémentaire dF s'exerçant sur une surface élémentaire dS :

$$dF = P \cdot dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS = \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin \theta \cdot dS$$

D'où : $h = y \cdot \sin \theta$

$F = \int dF$ sur toute la surface AB , on obtient :

$$F = \int_S P \cdot dS = \int_S \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin \theta \cdot dS = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \int_S y \cdot dS$$

Le terme $\left(\int_S y \cdot dS \right)$ représente le **Moment Statique** de la surface par rapport à Ox , qui est défini comme suit : $\int_S y \cdot dS = y_c \cdot S$

Avec (y_c) : Ordonnée du barycentre (centre de gravité) de la surface.

L'expression de F devient : $F = \rho \cdot g \cdot y_c \cdot \sin \theta \cdot S$

Et comme :

$$h_c = y_c \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow F = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S$$

Avec :

h_c : Profondeur du CG de la surface

S : l'aire de la surface

I.5.4. Forces de pression sur une surface courbe

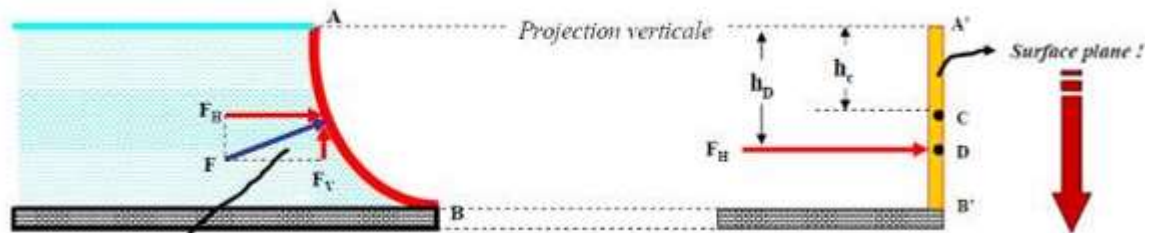


Figure I.13. Forces de pression sur une surface oblique

La surface (dS) se trouve à une profondeur (h), la pression qui s'y exerce est : $P = \rho \cdot g \cdot h$

Et, $dF = \rho \cdot g \cdot h \cdot dS \Rightarrow F = \int \rho \cdot g \cdot h \cdot dS$ Cette intégrale est impossible à résoudre car $F = (F_H, F_V)$

Avec : $F_H = \int dF \cdot \sin \theta = \int \rho \cdot g \cdot h \cdot \sin \theta \cdot dS$

$dS \cdot \sin \theta$: Projection de la surface (S) sur un plan vertical $\Rightarrow F_H = \rho \cdot g \cdot h_c \cdot S_x$

Ou : S_x : projection de (S) sur un plan vertical
 h_c : profondeur du C.G de la surface S_x

Et $F_V = \int dF \cdot \cos \theta = \int \rho \cdot g \cdot h \cdot \cos \theta \cdot dS$

$dS \cdot \cos \theta$: Projection de la surface (S) sur un plan horizontal $\int h \cdot \cos \theta \cdot dS = W$: volume du fluide compris entre la surface courbée et la surface libre ;

Donc : $F_V = \rho \cdot g \cdot W$

N.B : F_V : est le poids du fluide compris entre la surface courbée et la surface libre

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_V^2 + F_H^2}$$

Le centre de poussée est donc obtenu par l'intersection entre la surface courbée et la ligne d'action de la résultante (F) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante (F) par rapport à l'horizontale est obtenu par la relation suivante :

$$\theta = \arctg \frac{F_V}{F_H}$$

I.5.5. Cas général (formule pratique)

En général, la résultante des forces de pression sur une surface plane s'écrit :

$$F = \rho \cdot g \cdot d \cdot S$$

Avec :

S : Surface mouillée considérée (en contact avec le liquide).

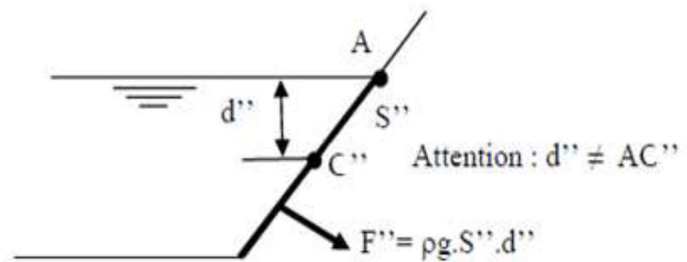
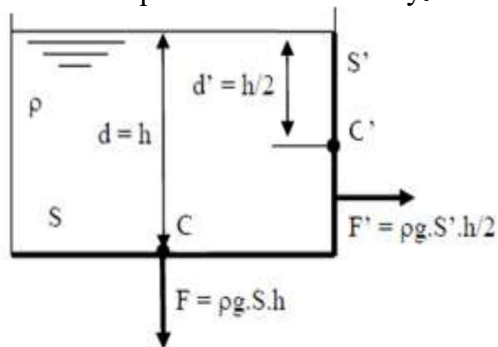
d : distance entre le centre de gravité de S et la surface libre.

D : le point d'application de la résultante de la force de poussée E sur la surface de contact S :

- Pour une paroi horizontale : $d = h$

- Pour une paroi verticale : $d' = h/2$

- Pour une paroi *Inclinée* : $d'' = y_c \cdot \sin\theta$



Donc, la force de pression sur une surface plane est égale au produit de la surface immergée par la pression qui subit son barycentre.

I.5.6. Centre de poussée

On appelle le point d'application de la force de pression (F) « **Centre de poussée** ». C'est le point d'application de la résultante de la force de poussée \vec{F} sur la surface de contact S . Il se détermine par le calcul du moment de la force F par rapport à un point O quelconque. En général, il n'est pas confondu avec le centre de gravité (CDG).

$$Y_D \cdot F = \int y \cdot dF = \rho \cdot g \cdot \sin\theta \int y^2 \cdot dS$$

$$\text{Soit : } \Rightarrow Y_D = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin\theta \int y^2 \cdot dS}{F} = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin\theta \int y^2 \cdot dS}{\rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot y_c \cdot S} = \frac{\int y^2 \cdot dS}{y_c \cdot S} = \frac{I_{Ox}}{y_c \cdot S}$$

Avec :

Le terme $\int y^2 \cdot dS$ représente le Moment d'inertie de la surface AB par rapport à Ox , qui est défini comme suit : $\int y^2 \cdot dS = I_{Ox}$

I_{Ox} : Est le moment d'inertie de la surface S par rapport l'axe Ox .

Sachant que le théorème de Huygens permet d'écrire : $I_{Ox} = I_{XC} + y_c^2 \cdot S$

Avec : I_{XC} : Est le moment d'inertie de la surface S par rapport à un axe passant par son barycentre (centre de gravité) C

$$\text{Donc : } \Rightarrow Y_D = \frac{\int y^2 \cdot dS}{y_c \cdot S} = \frac{I_{Ox}}{y_c \cdot S} = \frac{I_{XC}}{y_c \cdot S} + \frac{y_c^2 \cdot S}{y_c \cdot S}$$

Ainsi ; le point d'application de la force de poussée est donné par la relation : $Y_D = y_c + \frac{I_{XC}}{y_c \cdot S}$

Cette relation montre que le point d'application de (F) se trouve toujours plus en bas que le C. G d'une distance égale à $\frac{I_{XC}}{Y_c \cdot S}$ et $h_D = Y_D \cdot \sin \theta$

Avec :

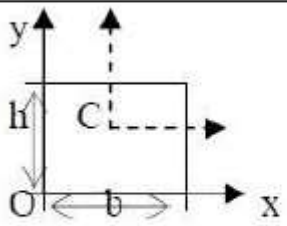
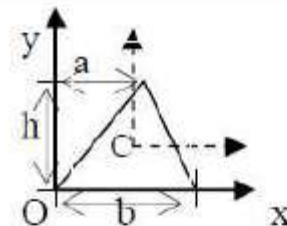
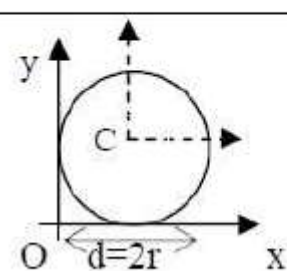
Y_D : Ordonnée du centre de poussée (Point par lequel passe la force \vec{F}_p)

y_c : Ordonnée du CDG de la paroi

I_{XC} : Moment d'inertie de la paroi par rapport à l'axe parallèle à OX et passant par le CDG

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

Tableau N° I.2. Moments d'inertie de quelques surfaces particulières

Forme	$S, x_c, y_c, I_{Ox}, I_{Cx}$
	$S = h \cdot b, x_c = b/2, y_c = h/2$ $I_{Ox} = b \cdot h^3/3, I_{Cx} = b \cdot h^3/12$
	$S = h \cdot b / 2, x_c = (a + b)/3, y_c = h/3$ $I_{Ox} = b \cdot h^3/12, I_{Cx} = b \cdot h^3/36$
	$S = \pi \cdot r^2, x_c = r, y_c = r$ $I_{Ox} = 5\pi \cdot r^4/4, I_{Cx} = \pi \cdot r^4/4$

Chapitre II : Equations fondamentales de l'Hydrodynamique

Objectifs

Au terme de ce chapitre, l'étudiant devra être capable de :

- Déterminer le nombre de Reynolds et en interpréter la signification ;
- Identifier les différents régimes d'écoulement d'un fluide (laminaire, transitoire et turbulent) ;
- Calculer les pertes de charge linéaires et singulières ;
- Appliquer le théorème de Bernoulli à un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible.

Chapitre II : Equations fondamentales de l'Hydrodynamique

Introduction :

L'Hydrodynamique concerne l'étude des fluides et/ou liquides en mouvement. Il s'agit d'une partie importante du génie civil car la majorité des opérations nécessite le transport de fluides ou la réalisation de mélanges fluide-fluide ou fluide-solide.

On abordera dans cette partie les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits (on ne tiendra pas compte des effets de viscosité $\mu = 0$ et $\rho = \text{constante}$),

II.1. Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement.

Remarque : la vitesse et la pression peuvent varier d'une section à une autre le long de l'écoulement mais dans une même section, elles sont constantes.

Autrement dit, les dérivées partielles par rapport au temps des grandeurs physiques sont nulles ($\partial/\partial t = 0$). C'est-à-dire que :

$$P = f_1(x, y, z) \quad V = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial V_y}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$$

II.1.1. Quelques notions de base

II.1.1.a. Particule liquide :

C'est un volume élémentaire de liquide que l'on considère comme indivisible afin d'étudier mécaniquement son équilibre ou son mouvement.

II.1.1.b. Trajectoire et lignes de courant

- Trajectoire

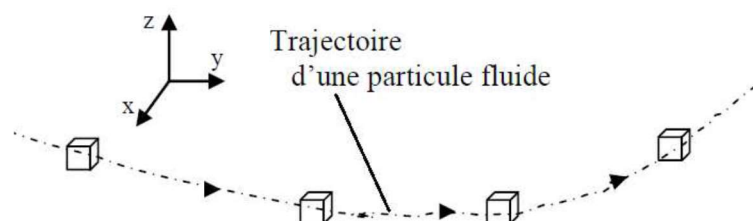


Figure II.1 : Trajectoire d'une particule liquide

On appelle trajectoire, la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est-à-dire l'ensemble de ses positions occupées successivement entre deux instants.

- **Ligne de courant**

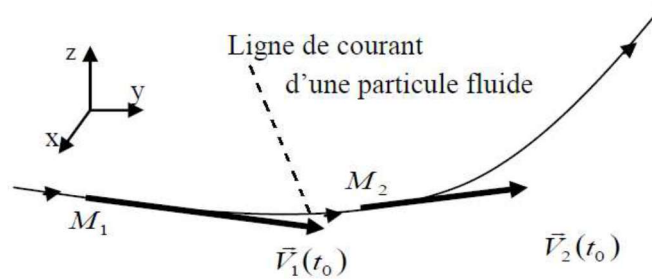


Figure II.2 : Ligne de courant

C'est la courbe tangente en tout point de l'espace au vecteur vitesse, à un instant donné.

- **Tube de courant (Veine fluide)**

C'est l'ensemble des lignes de courants s'appuyant sur un contour fermé quelconque pris à l'intérieur de l'écoulement. La surface tubulaire ainsi formée, est appelée « **Veine liquide** »

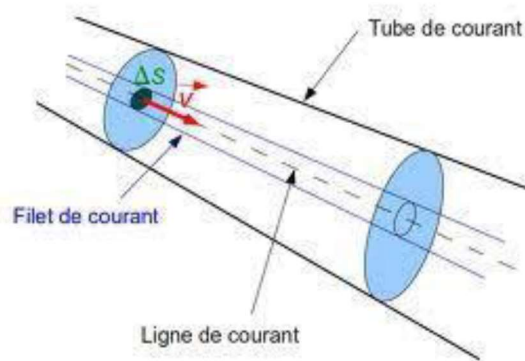


Figure II.3 : Veine liquide (tube de courant)

- **Section d'écoulement :**

C'est une surface délimitée par un tube de courant normalement aux lignes de courant. Elle est également appelée section droite transversale.

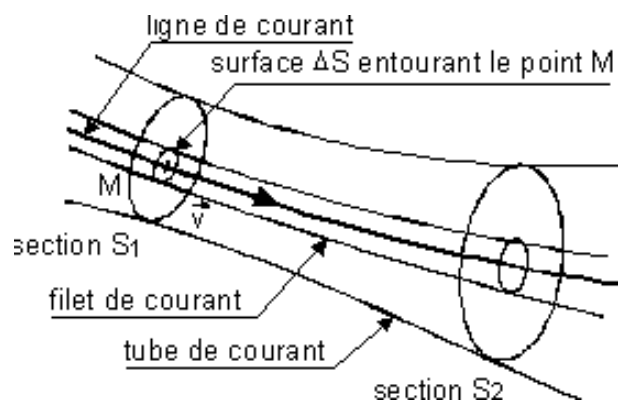


Figure II.4 : Section d'écoulement

II.2. Equation de continuité ou conservation de la masse

Considérons un fluide parfait (liquide), qui s'écoule en régime stationnaire dans la canalisation ci-dessous.

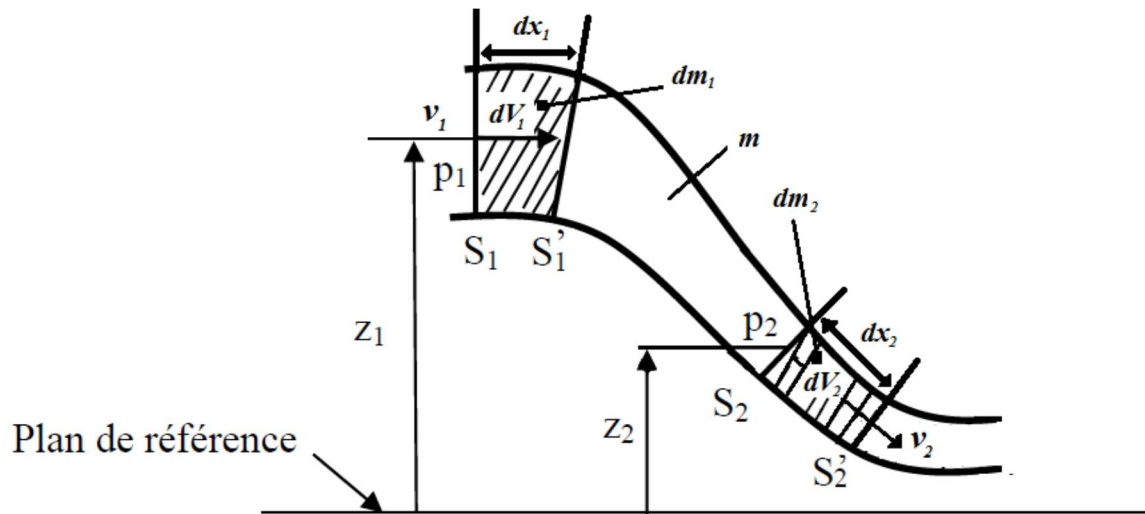


Figure II.5 : écoulement en régime stationnaire dans une canalisation

On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant (t),
- S_1' et S_2' respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t' = t + dt$
- v_1 et v_2 les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 .
- dx_1 ; et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S_1' ,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S_2' ,
- m : masse comprise entre S_1' et S_2 ,
- dV_1 ; : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S_1' ,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S_2' ,

A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1 + m)$,

A l'instant $t + dt$: le fluide compris entre S_1' et S_2' à une masse égale à $(m + dm_2)$.

Par conservation de la masse : $dm_1 + m = m + dm_2$

En simplifiant par m, on obtient : $dm_1 = dm_2$

Donc : $\rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2$

Ou encore : $\rho_1 \cdot S_1 dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2$

En divisant par dt , on aboutit à : $\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

On obtient l'équation de continuité de la sorte : $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$

Cette relation représente le **débit volumique** Q exprimé en (m³/s). **L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.**

II.2.1. Débit masse et débit volume

II.2.1.1. Débit masse

Le débit massique q_m est la masse élémentaire dm de fluide qui traverse une surface droite élémentaire (dS) pendant un intervalle de temps (dt).

Donc : $q_m = \frac{dm}{dt}$

En tenant compte des équations précédentes on obtient : $q_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}$
 $\Rightarrow q_m = \rho \cdot v_1 \cdot S_1 = \rho \cdot v_2 \cdot S_2$

Soit dans une section droite quelconque S de la canalisation à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne (v):

$$q_m = \rho \cdot v \cdot S$$

Où :

q_m : Débit massique en [kg/s] ;

ρ : Masse volumique en [kg/m³] ;

S : Section de la veine fluide en [m²] ;

v : Vitesse moyenne du fluide à travers S en [m/s].

II.2.1.2. Débit volumique

Le débit volumique Q_v est le volume élémentaire (dV) de fluide qui traverse une surface droite élémentaire (dS) pendant un intervalle de temps (dt).

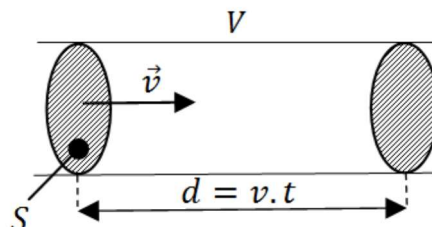


Figure II.6. Débit volumique à travers une conduite

Soit : $Q_v = \frac{dV}{dt}$

Où :

dt : Intervalle de temps en secondes [s] ;

dV : Volume élémentaire, en [m³], ayant traversé une surface (S) pendant un intervalle de temps dt ;

Q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite, en [m³/s].

On peut également écrire le débit volumique en fonction de la vitesse d'écoulement :

$$Q_v = \frac{dV}{dt} = S \cdot \frac{dx}{dt} = S \cdot v \quad Q_v = S \cdot v$$

II.2.1.3. Relation entre débit massique et débit volumique

La masse volumique ρ est donnée par la relation : $q_m = \rho \cdot v \cdot S$; $Q_v = S \cdot v$;

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{d'ou} \quad q_m = \rho \cdot Q_v$$

II.3. Théorème de Bernoulli

II.3.1. Equation de Bernoulli sans échange de Travail

Soit un écoulement permanent d'un **fluide parfait incompressible** dans une conduite. Les deux sections : S_1 ; et S_2 délimitent à l'instant (t) une certaine masse de fluide.

On note Z_1 et Z_2 respectivement les hauteurs des centres de gravité des masses dm_1 ; et dm_2 .

On désigne par F_1 ; et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 ; et S_2 .

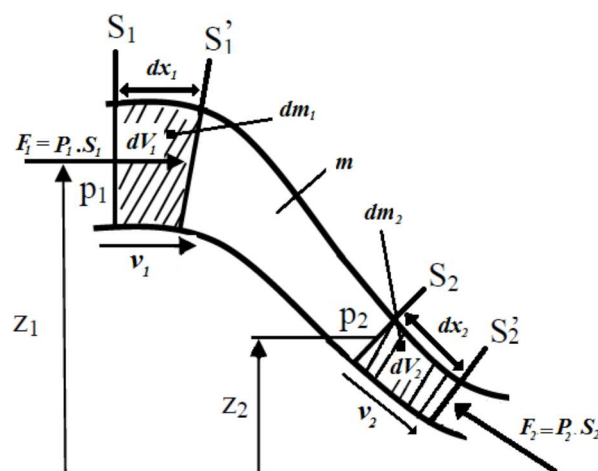


Figure II.7. Écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible

A l'instant $(t+dt)$; cette masse se déplace et se trouve entre deux sections S'_1 ; et S'_2 . On a

$$\text{donc : } dm = dm_1 = dm_2$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à dm (La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures) : $\Delta E_c(dm) = \sum W_{1 \rightarrow 2}$

$$\text{La variation de l'énergie cinétique : } \Delta E_c(dm) = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot (v_2^2 - v_1^2) \dots (1)$$

$$\text{Travail de force de pesanteur : } W_p = (z_1 - z_2) \cdot g \cdot dm \dots (2)$$

Travail des forces intérieures est nul car le fluide est parfait (viscosité : $\mu=0$)

$$\text{Travail des forces de pression : Sur } S_1 : W_{p1} = F_1 \cdot dx_1 = P_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt \dots (3)$$

$$\text{Sur } S_2 : W_{p2} = F_2 \cdot dx_2 = P_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt \dots (4)$$

$$\text{Sur surface latérale : } W_{pl} = 0$$

(1) = (2) + (3) - (4) ; on obtient donc :

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot dm \cdot (v_2^2 - v_1^2) = P_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt - P_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt + (z_1 - z_2) \cdot g \cdot dm ; \text{ multiplions cette relation par } (\rho) ;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = P_1 \cdot \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt - P_2 \cdot \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt + (z_1 - z_2) \rho \cdot g \cdot dm$$

$$\text{Or, d'après l'équation de conservation du débit : } dm = \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt$$

$$\text{Donc ; } \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = P_1 \cdot dm - P_2 \cdot dm + (z_1 - z_2) \rho \cdot g \cdot dm$$

On aboutit enfin à l'équation de Bernoulli :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \quad : : \text{Equation de Bernoulli pour un Fluide Parfait}$$

$$\Rightarrow P + \rho \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{Constante [Pa]}$$

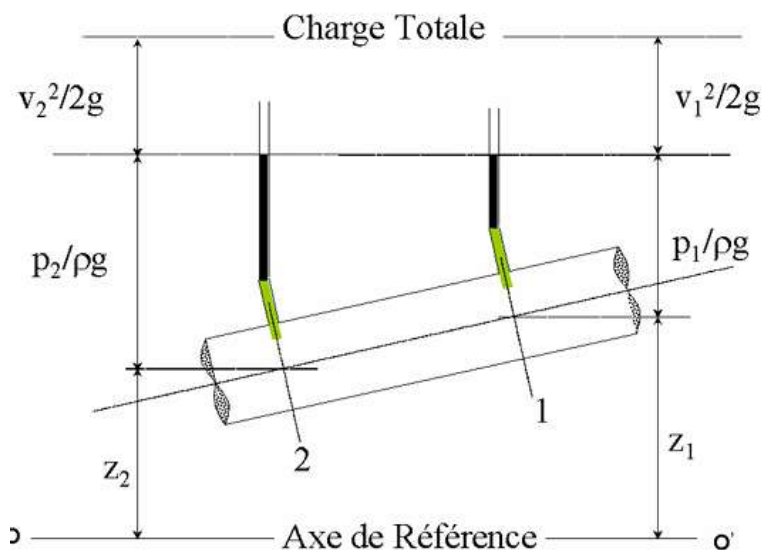


Figure II.8. Distribution des hauteurs d'énergie le long d'une conduite

Les termes de cette équation sont des énergies par unité de volume [J/m³], ce sont aussi des termes de pression [Pa].

En effet, $1 \text{ J/m}^3 = 1 \text{ Nm/m}^3 = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$

Donc le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie par unité de volume.

P : Pression statique : C'est la grandeur que l'on mesure par exemple par un manomètre ou l'énergie potentielle de pression/ unité de volume.

$(P.g.z)$: Energie potentielle de position par unité de volume

$\frac{1}{2}\rho.v^2$: Energie cinétique par unité de volume ou pression dynamique

La quantité $P + \rho.g.z + \frac{1}{2}\rho.v^2$ est appelée aussi la charge du fluide.

II.3.1.1. Autres formes du théorème de Bernoulli

- En divisant l'expression $P + \rho.g.z + \frac{1}{2}\rho.v^2 = \text{constante}$ par $(\rho.g)$, on obtient :

$$z + \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho.g} = \text{constante en [m]}$$

Tous les termes sont des hauteurs unité le mètre [m] ou de l'énergie par unité de poids ($J/N = N.m / N = m$).

- En divisant toute l'expression par ρ , on obtient : $\frac{1}{2}v^2 + g.z + \frac{P}{\rho} = \text{constante en [J/kg]}$

Ainsi ; l'Equation de Bernoulli pour un Fluide Parfait ; tous les termes sont des énergies par unité de masse.

II.3.1.2. Equation de Bernoulli avec échange de travail

Dans un écoulement, l'énergie mécanique totale par unité de volume de fluide, peut être modifiée d'une section à l'autre en introduisant dans le circuit une machine hydraulique. La machine peut être récepteur (turbine) ou génératrice (pompe).

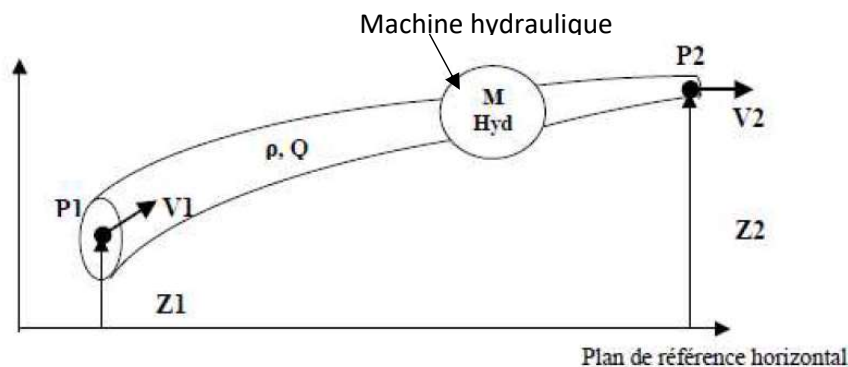


Figure II.9. Ecoulement avec machine hydraulique

Lorsque le fluide traverse une machine hydraulique, il échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail ΔW pendant une durée Δt .

La puissance P échangée est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \text{ [J/kg]} \equiv [W]$$

Si $P > 0$: la machine fournit de l'énergie au fluide (pompe) ;

Si $P < 0$: la machine extrait de l'énergie au fluide (turbine).

L'application de l'équation de Bernoulli entre les points P1 et P2 permet d'écrire :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \mp \frac{P}{Q_v}$$

$\frac{P}{Q_v}$: Quantité positive (unité : Pa), c'est l'énergie par unité de volume fournie par une pompe au liquide ou absorbée par une turbine.

On écrira : (+ E) pour une machine hydraulique réceptrice (turbine) ; (-E) Pour une machine hydraulique Génératrice (pompe).

II.4. Phénomène de Venturi

Le tube de venturi est un tube de section variable. Il permet de mesurer des débits et vitesse connaissant la pression dans les différentes sections.

On suppose qu'il n'y a pas de perte d'énergie (fluide parfait pas de frottement) dans le tube de Venturi.

Le tube de venturi est utilisé en aéronautique pour mesurer la vitesse relative en vol, mais aussi dans les carburateurs automobiles ainsi que dans les aéroglyphes. Le tube de venturi est aussi utilisé dans les sites industriels pour mesurer le débit d'un fluide dans une canalisation.

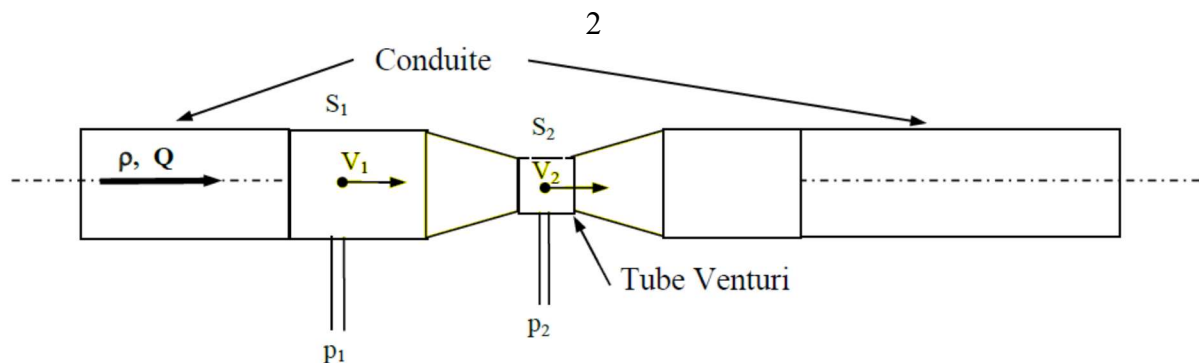


Figure II.10. Tube de Venturi

On applique le théorème de Bernoulli entre les sections S1; et S2 du tube Venturi.

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right) = P_1 - P_2 + \rho \cdot g (z_1 - z_2)$$

Tube de Venturi horizontal : $\Rightarrow (z_1 - z_2 = 0)$

La conservation de débit s'écrit : $Q = S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}$

$$\text{D'où : } \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) = P_1 - P_2 \Rightarrow v_1^2 = \frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}} \Rightarrow Q_v = S_1 \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

Connaissant les caractéristiques du tube Venturi (S1; et S2), la mesure de la différence de pression (P1-P2) permet de déterminer le débit.

En réalité, le débit réel sera légèrement différent du débit trouvé à partir de l'équation précédente. En effet, il y a toujours des frottements (dont on n'a pas tenu compte) qui engendrent une différence de pression plus importante.

Par conséquent, il est nécessaire d'étalonner cet appareil.

$$Q_{v\text{reel}} = C \cdot S_1 \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - P_2)}{\rho \cdot \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

C : Coefficient de correction obtenu par étalonnage du Venturi.

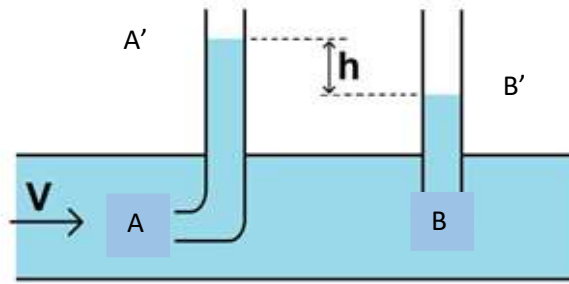
II.5. Tube de Pitot

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilisé pour faire des mesures de vitesse dans divers écoulements. Le principe est basé sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement.

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en (A) face au courant, et l'autre en (B) est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur. Au point (B), le liquide a la même vitesse (v) que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide :

$P_B = P_A$.

En A, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est P_A .



P.R

Figure I.11. Tube de Putot

Appliquons le théorème de Bernoulli, entre les deux points 1 et 2, on obtient :

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B$$

On a : $z_A = z_B$ et $v_A = 0$ (point d'arrêt)

Alors, il vient : $\frac{P_A - P_B}{\rho \cdot g} = \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$

D'où : $P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_B^2 \dots \dots \dots (1)$

De l'hydrostatique, on a : $P_{A'} - P_A = -\rho \cdot g \cdot (z_{A'} - z_A) \dots \dots \dots (2)$

$P_{B'} - P_B = -\rho \cdot g \cdot (z_{B'} - z_B) \dots \dots \dots (3)$

On multiplie (2) par (-1) : $P_A - P_{A'} = -\rho \cdot g \cdot (z_A - z_{A'}) \dots \dots \dots (4)$

L'équation (3) reste sans changement

Sachant que : $P_{A'} = P_{B'} = P_{atm}$ et $z_A - z_B = 0$

En sommant ces deux équations (3) et (4), on obtient :

$P_A - P_{A'} + P_{B'} - P_B = -\rho \cdot g \cdot (z_A - z_{A'}) + \rho \cdot g \cdot (z_{B'} - z_B)$

Après élimination de $P_{A'} = P_{B'} = P_{atm}$ et $z_A - z_B = 0$; on obtient enfin :

$$P_A - P_B = -\rho \cdot g \cdot (z_{B'} - z_{A'}) = \rho \cdot g \cdot (z_{A'} - z_{B'}) = \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Ce qui donne : $\rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \rho v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2g \cdot h}$

Chapitre III : Dynamique des liquides réels

Objectifs :

Au terme de ce chapitre, l'étudiant devra être capable de :

- Distinguer les écoulements permanents et non permanents à partir des variations de vitesse et de pression.
- Expliquer l'origine des pertes de charge et calculer les pertes singulières dans les conduites.
- Calculer les pertes de charge linéaires à l'aide de la formule de Darcy–Weisbach et des relations reliant λ au régime d'écoulement.
- Appliquer le théorème de Bernoulli généralisé aux fluides réels en intégrant les pertes de charge, ainsi que l'effet des pompes et turbines.
- Interpréter un diagramme d'énergie en identifiant les différentes hauteurs (pression, vitesse, altitude) et les pertes le long d'une conduite.

Chapitre III : Dynamique des liquides réels

III.1 Ecoulement des liquides

III.1.1. Ecoulement permanent :

C'est un écoulement qui ne varie pas avec le temps et pour lequel la vitesse et la pression ne sont pas des fonctions que des coordonnées et indépendantes du temps. La vitesse et la pression peuvent varier d'une section à une autre le long de l'écoulement mais dans une même section, elles sont constantes.

A titre indicatif, soit l'exemple de l'écoulement d'un réservoir dont le niveau est maintenu constant ;

$$P=f_1(x, y, z)$$

$$V=f_2(x, y, z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0; \frac{\partial V_x}{\partial t} = 0; \frac{\partial V_y}{\partial t} = 0; \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0$$

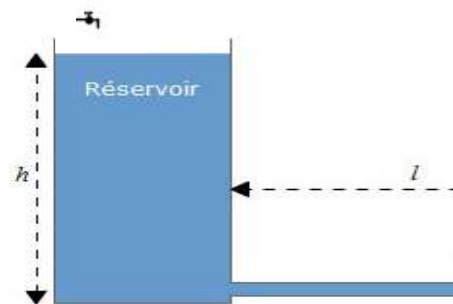


Figure III.1. Ecoulement permanent

III.1.2. Ecoulement non permanent :

Lorsque l'écoulement est non permanent, la vitesse et la pression dépendent aussi bien des coordonnées que du temps, et varient dans chaque section en fonction du temps.

$$P=f(x, y, z, t) \quad V=f(x, y, z, t)$$

A titre d'exemple : Ecoulement d'un réservoir par un orifice pratiqué au fond de celui-ci

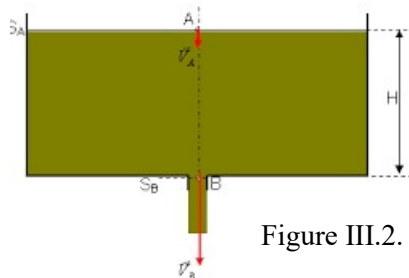


Figure III.2. Ecoulement non permanent

III.2 Pertes de charges

Les pertes de charge sont les pertes d'énergie du fluide lorsqu'il se déplace. Cette perte peut être due aux frottements (viscosité) des particules sur les parois des conduites « pertes de charge régulières » ou aux accidents de parcours (coude par exemple, « pertes de charge singulières »).

Cette perte d'énergie se traduit :

- _ Soit par une chute de pression ΔP en [Pa] ou [J/m³]
- _ Soit par une chute de hauteur Δh en [m]
- _ Soit par une perte d'énergie massique ΔE en [J/kg].

III.2.1 Pertes de charges singulières

Lorsqu'un écoulement dans une conduite subit des variations brusques (de section ou de direction), il se produit des pertes de charges dites singulières. Elles sont, obligatoirement, présentes dans toutes les installations, et causent des nuisances mécaniques (corrosion) et hydrodynamiques.

Les pertes de charges singulières peuvent être provoquées par :

- Un changement de section de la conduite (convergent, divergent),
- Un changement de direction (coude),
- Un branchement ou raccordement,
- Un dispositif de mesure et contrôle de débit...

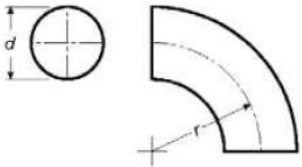
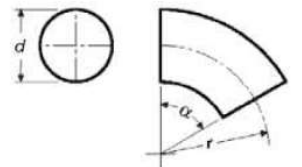
Les pertes de charge singulières sont proportionnelles au carré de la vitesse, elles sont exprimées sous les deux formes suivantes :

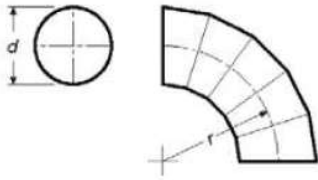
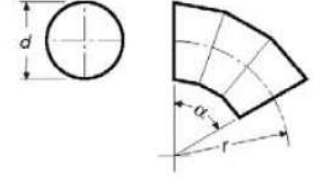
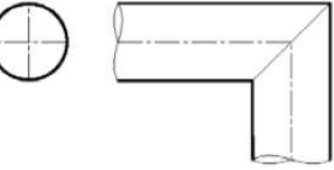

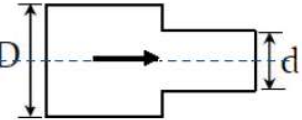
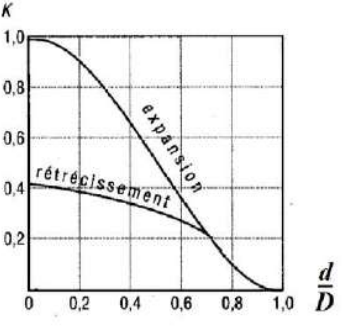
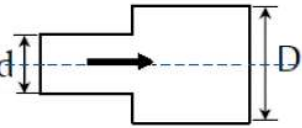
$$\Delta P = K \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad \text{ou} \quad \Delta h = K \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Où K est appelé coefficient de perte de charge singulière (sans dimension dépendant de la nature et de l'origine des pertes de charge.

La valeur de K sont données par les constructeurs dans leurs catalogues. Quelques valeurs moyennes sont données dans le tableau suivant :

Tableau N° III.1. Valeurs moyennes de K

Coude à 90°		<table border="1"> <thead> <tr> <th>r/d</th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,2</td> </tr> </tbody> </table>	r/d	K	0,50	0,9	0,75	0,5	1,00	0,4	1,50	0,3	2,00	0,2															
		r/d	K																										
0,50	0,9																												
0,75	0,5																												
1,00	0,4																												
1,50	0,3																												
2,00	0,2																												
Coude à 30°, 45° et 60°		<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">r/d</th> <th colspan="3">K</th> </tr> <tr> <th>α= 30°</th> <th>α= 45°</th> <th>α= 60°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>0,3</td> <td>0,5</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> </tr> </tbody> </table>	r/d	K			α= 30°	α= 45°	α= 60°	0,50	0,3	0,5	0,7	0,75	0,2	0,3	0,3	1,00	0,1	0,2	0,3	1,50	0,1	0,2	0,2	2,00	0,1	0,1	0,1
		r/d		K																									
α= 30°	α= 45°		α= 60°																										
0,50	0,3	0,5	0,7																										
0,75	0,2	0,3	0,3																										
1,00	0,1	0,2	0,3																										
1,50	0,1	0,2	0,2																										
2,00	0,1	0,1	0,1																										

<p>Coude 90° à secteurs</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th>r/d</th> <th>K</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>1,1</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,6</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,2</td> </tr> </tbody> </table>	r/d	K	0,50	1,1	0,75	0,6	1,00	0,4	1,50	0,3	2,00	0,2															
r/d	K																												
0,50	1,1																												
0,75	0,6																												
1,00	0,4																												
1,50	0,3																												
2,00	0,2																												
<p>Coude 30°, 45° et 60° à secteurs</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">r/d</th> <th colspan="3">K</th> </tr> <tr> <th>alpha=30°</th> <th>alpha=45°</th> <th>alpha=60°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>0,75</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> </tr> <tr> <td>1,00</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td>1,50</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>2,00</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> <td>0,1</td> </tr> </tbody> </table>	r/d	K			alpha=30°	alpha=45°	alpha=60°	0,50	0,4	0,6	0,7	0,75	0,2	0,3	0,4	1,00	0,1	0,2	0,3	1,50	0,1	0,2	0,2	2,00	0,1	0,1	0,1
r/d	K																												
	alpha=30°	alpha=45°	alpha=60°																										
0,50	0,4	0,6	0,7																										
0,75	0,2	0,3	0,4																										
1,00	0,1	0,2	0,3																										
1,50	0,1	0,2	0,2																										
2,00	0,1	0,1	0,1																										
<p>Coude 90° à angle vif</p>		<p style="text-align: center;">K = 1,4</p>																											
<p>Coude 30°, 45° et 60° à angle vif</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">K</th> </tr> <tr> <th>alpha=30°</th> <th>alpha=45°</th> <th>alpha=60°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,4</td> <td>0,7</td> <td>1,0</td> </tr> </tbody> </table>	K			alpha=30°	alpha=45°	alpha=60°	0,4	0,7	1,0																		
K																													
alpha=30°	alpha=45°	alpha=60°																											
0,4	0,7	1,0																											
<p>Rétrécissement brusque</p>																													
<p>Élargissement brusque</p>																													

III.2.1.1. Élargissement brusque de section

$$\Delta H = \xi_{él} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

$\xi_{él}$: Coefficient de perte de charge pour un élargissement brusque

$\xi_{él} = (1 - \frac{S_1}{S_2})^2$; entre les sections 1 et 2 le courant s'élargit, la vitesse diminue tandis que la pression augmente

III.2.1.2. Elargissement graduel :

Appelé aussi diffuseur ou l'écoulement s'accompagne d'une diminution de la vitesse et d'une augmentation de la pression ; dans les diffuseurs se produisent des pertes de charges par frottement

$$\Delta H_{dif} = \Delta H_{fr} + \Delta H_{\acute{e}l}$$

Avec : ΔH_{fr} : Perte de charge due aux frottements

$\Delta H_{\acute{e}l}$: Perte de charge due à l'élargissement de la conduite (formation des tourbillons)

D'ou

$$\Delta H_{dif} = \xi_{dif} \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

ξ_{dif} : Coefficient de perte de charge due au diffuseur

$$\xi_{dif} = \frac{\lambda_t}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + K \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

λ_t : Coefficient de perte de charge due aux frottements

α : Angle du diffuseur

n : degré d'ouverture du diffuseur ($n = S_2/S_1$)

K : coefficient de correction ($K < 1$). Le coefficient (K) est appelé aussi coefficient d'amortissement de « Choc » qui est donné par un certain nombre de formules empiriques telles que les expressions ci-après :

$K = \sin \alpha$ (FLIGNER)

$K = 3,2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4 \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ $5 < \alpha < 20$ (IDELTCHIK)

III.2.1.3. Rétrécissement brusque :

Un rétrécissement brusque entraîne toujours une perte d'énergie plus faible que dans le cas d'un élargissement brusque pour le même rapport de sections.

Dans ce cas, les pertes de charge sont dues au décollement du courant en passant à la conduite de faible diamètre (tourbillons) et la perte de charge dans ce cas de figure s'écrit :

$$\Delta H_{rét} = \xi_{rét} \frac{v^2}{2g}$$

Dans ce cas et en appliquant le principe de la conservation de masse : $V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2$; (quand S diminue, la vitesse V augmente) ; il faut prendre la grande vitesse.

$$\xi_{rét} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{Avec : } n = \frac{S_2}{S_1} ; n : \text{degré de rétrécissement}$$

III.2.1.4. Rétrécissement graduel (conduite conique) :

Il est généralement appelé « Convergent » ou l'écoulement s'accompagne d'une augmentation de la vitesse et d'une dépression. Dans les convergents, on a affaire aux pertes de charges dues au frottement uniquement :

$$\xi_{reg} = \frac{\lambda_t}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_2^2}{2g}$$

III.2.1.5. Tournant d'une conduite :

Un tournant brusque d'une conduite ou bien un coude non arrondi produit en général des pertes de charges importantes car : à l'intérieur de cet élément naissent des découlements du courant et des tourbillons.

Soit : ξ_c : coefficient de perte de charge d'un coude

La régularité du tournant réduit considérablement l'apparition des zones de tourbillons

III.2.2. Pertes de charges linéaires (réparties)

Les pertes de charge linéaires sont générées par les frottements le long des longueurs droites des conduites. Elles dépendent :

- du type d'écoulement et de la rugosité interne de la conduite (ϵ)
- du diamètre de la conduite ($1/D$)
- de la pression dynamique ($v^2/2g$)
- de la longueur de la conduite.

Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur (L) de la conduite, inversement proportionnelles à son diamètre d , proportionnelle au carré de la vitesse moyenne (v) du fluide.

Entre deux points séparés par une longueur (L), dans une conduite de diamètre (d) apparaît une perte de pression ΔP . Exprimée sous les deux formes suivantes :

$$\Delta P = K \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \text{ ou } \Delta H_f = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v_m^2}{2g} \dots \dots \dots \text{Formule de DARCY-WEIBACH}$$

λ : Coefficient de charges réparties sans dimension appelé coefficient de perte de charge linéaire ou (coefficient de frottement dans les conduites)

$\frac{L}{d}$: Longueur relative de la conduite

v_m : vitesse moyenne d'écoulement

D'où les pertes de pression dues aux frottements deviennent :

$$\Delta P_f = \gamma \cdot \Delta H_f = \gamma \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v_m^2}{2g}$$

En considérant l'égalité entre les forces de pression et de frottement agissantes sur une enveloppe cylindrique de liquide de longueur L.

$$P_1 \frac{\pi d^2}{4} - P_2 \frac{\pi d^2}{4} - \tau_p \pi d L = 0$$

τ_p : Contrainte de frottement agissant sur la paroi de la conduite

$$(P_1 - P_2) \frac{\pi d^2}{4} = \pi d L \tau_p$$

$$\Delta P_f \frac{d}{4} = L \tau_p$$

Sachant que : $\Delta P_f = \gamma \cdot \Delta H_f = \gamma \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v_m^2}{2g}$

En remplaçant ΔP_f par son expression ; on obtient :

$$\gamma \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v_m^2}{2g} = L \cdot \tau_p$$

D'où :

$$\lambda = \frac{4\tau_p}{\gamma \frac{v_m^2}{2g}}$$

Ainsi le coefficient de perte de charge (λ) est proportionnel au rapport de la force de frottement à la paroi de la conduite (τ_p) à la hauteur dynamique calculée à partir de la vitesse moyenne.

Le coefficient (λ) est lié au facteur de frottement par $\lambda=4f$ avec f : facteur de frottement

Le calcul des pertes de charge linéaires repose aussi presque entièrement sur la détermination de ce coefficient. La valeur de λ dépend du régime d'écoulement et de la rugosité de la conduite.

a) Cas de l'écoulement laminaire : $Re < 2000$

En régime laminaire, seules les forces de viscosité interviennent dans le calcul du coefficient (λ). Etant donnée, la vitesse est très faible, l'état de la surface n'intervient pas et donc le coefficient λ est uniquement fonction du nombre de Reynolds (Re).

Nous avons donc : $\lambda = \frac{64}{R_e}$ avec $R_e = \frac{v.d}{\eta}$

b) Cas de l'écoulement turbulent : $Re > 3000$

En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds (R_e) est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds (R_e) et de la rugosité (ϵ) de la conduite.

Plusieurs formules de calcul du coefficient λ sont proposés par différents auteurs. La formule de Colebrook est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{3,7d} + \frac{2,51}{R_e \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$$

III.2.3 Pertes de charges totales

Lors d'un écoulement dans une conduite, les pertes de charge totales sont l'addition de deux types de pertes de charge (régulières et singulières).

$$\Delta P_T = \Delta P_S + \Delta P_L$$

Avec : $\Delta P_S = K_S \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \right)$ Pertes de charge singulières :

$$\Delta P_L = K_L \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \right) \text{ Pertes de charge par frottement ou } K_L = \frac{\lambda \cdot L}{d}$$

III.3. Théorème de Bernoulli généralisé (Généralisation du théorème de Bernoulli aux fluides réels)

Lors d'un écoulement de fluide réel, il se produit du frottement entre deux couches voisines ou entre le fluide et paroi du conduit. Ces frottements engendrent des pertes d'énergie. Au contact des parois, la vitesse est pratiquement nulle et elle est maximum au centre du courant. Le mouvement d'un liquide réel s'accompagne de tourbillons, de brassage et de rotation qui engendrent des pertes d'énergies qui dans ce cas ne restent pas constantes comme dans le cas d'un fluide parfait, mais dépensent peu à peu pour convaincre la résistance au mouvement ; il y'a donc une diminution de l'énergie le long du courant. En tenant compte de tous ces phénomènes, l'équation s'écrira comme plus bas :

Et par conséquent la quantité : $z + \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g}$; qui représente l'énergie mécanique totale n'est plus une constante sur une ligne de courant.

L'équation de Bernoulli s'écrit alors :

$$z + \frac{P}{\rho \cdot g} + \alpha \frac{v^2}{2g} + j = H = \text{constante}$$

α : Coefficient sans dimension qui tient compte de l'irrégularité de la répartition des vitesses

C'est le théorème de Daniel Bernoulli dans le cas d'un fluide réel et qui exprime qu'en tout point en mouvement permanent, la cote, la hauteur représentative de la pression, la hauteur représentative de la vitesse et la perte de charge forment une somme constante.

L'équation de Bernoulli dans le cas d'un fluide réel peut être écrite entre les deux sections

$$(1-1) \text{ et } (2-2) \text{ de la façon suivante : } z_1 + \alpha_1 \frac{P_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \alpha_2 \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g} + j$$

J: peut s'écrire aussi sous la forme (ΣH_{1-2} : perte d'énergie ou de charge entre les sections 1 et 2) ; Quantité positive, unité [Pa], c'est la Somme de toutes les pertes de charge, singulières et linéaires entre les sections (1) et (2). Cette grandeur est aussi une hauteur particulière qui augmente sans arrêt le long du courant.

L'énergie perdue lors de l'écoulement ne disparaît pas mais elle se transforme plutôt en une énergie thermique. Ce qui entraîne une certaine augmentation de la température du liquide.

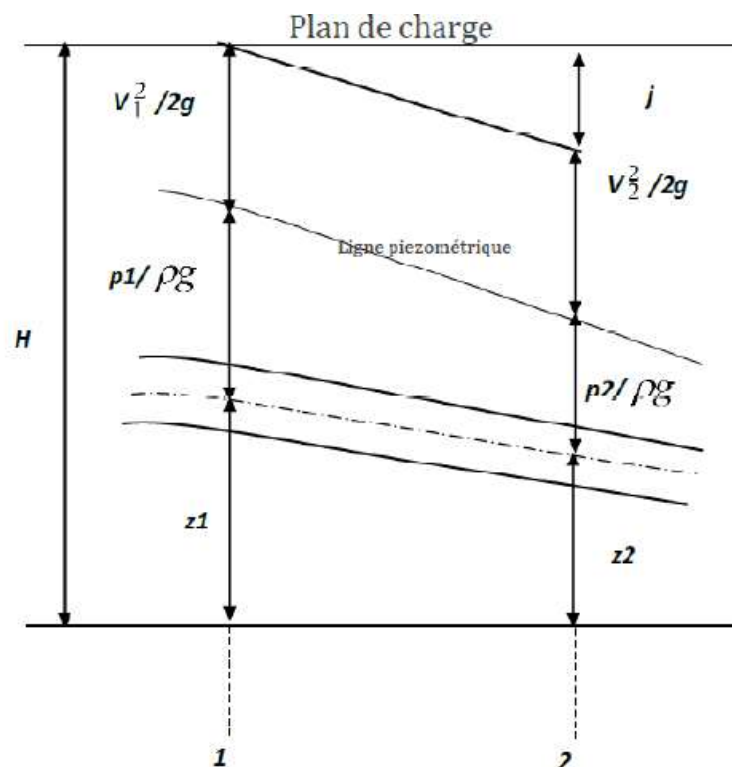


Figure III.3. Perte de charge

ΣH_{1-2} : Perte de charge (énergie) = ΔH_{1-2}

L : distance qui sépare les deux sections 1 et 2

i: pente hydraulique = $\Sigma H_{1-2} / L$

D'où : Un système de transport de fluide, que ce soit industrielle ou hydraulique, peut être doté d'une pompe pour donner une énergie au fluide dans son chemin vers sa destination, ou bien d'une turbine pour produire un travail mécanique à partir de l'énergie disponible dans le fluide lors de son passage dans cette turbine. L'équation de Bernoulli suit cette exigence pratique par l'introduction des énergies de la pompe et de la turbine, selon le cas, et même l'introduction de la perte de charge totale, donc la forme de la relation de Bernoulli devient :

a. Dans le cas d'un système de pompage :

$$\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 + W_{pompe} = \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 + g\Delta H_t$$

b. Dans le cas d'un système de production de travail mécanique

$$\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{1}{2} V_1^2 + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{1}{2} V_2^2 + gz_2 + W_{turbine} + g\Delta H_t$$

Comme d'habitude, les deux relations de Bernoulli généralisées peuvent être exprimées pour des cas pratiques en hauteur, cela pour faciliter la comparaison des caractéristiques de la machine avec celles du réseau.

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1 + H_{pompe} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2 + \Delta H_t$$

En fin, on obtient :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2 + H_{turbine} + \Delta H_t$$

H_{pompe} est la hauteur utile que doit la pompe fournir au système pour son bon fonctionnement et $H_{turbine}$ est la hauteur utile donnée par le système pour que cette turbine hydraulique produit un travail mécanique.

NB : on note ici que ΔH_t est la somme de toutes les pertes de charge linéaires et singulières entre les points 1 et 2. On note aussi que le coefficient de l'énergie cinétique $\alpha = 1$ pour les régimes turbulents.

III.4. Diagramme d'énergie

Le **diagramme d'énergie** dans la **dynamique des liquides réels** est une représentation graphique qui montre comment l'énergie d'un système de liquide est distribuée sous différentes formes (potentielle, cinétique, interne, etc.) au cours de l'écoulement du fluide.

Une particule liquide de volume (W), animée d'une vitesse (V), soumise à une pression (P) et se trouvant à la cote (z) par rapport à un plan horizontal de référence possède des différentes énergies suivantes que l'on appelle aussi hauteurs.

Voici les principaux concepts qui sont généralement illustrés dans un tel diagramme :

III.4.1. Énergie cinétique (due à la vitesse d'écoulement) :

- Elle est liée à la vitesse du fluide. Plus un liquide se déplace rapidement, plus l'énergie cinétique est élevée. Elle est définie par :

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Par unité de poids : } Ec' = \frac{Ec}{\gamma \cdot W} = \frac{mv^2}{2\gamma \cdot W} = \frac{mv^2}{2\rho \cdot g \cdot W} = \frac{v^2}{2g} \text{ d'où } Ec' = \frac{v^2}{2g}$$

Elle s'exprime en (m), c'est pour cela elle est appelée hauteur

III.4.2. Énergie de pression (ou travail de pression) :

- L'énergie est aussi stockée dans le fluide sous forme de pression, qui peut effectuer un travail lors de l'écoulement du fluide. Le terme correspondant à l'énergie de pression est généralement représenté par :

$$Ep = P \cdot W \quad \text{avec : } P : \text{pression}$$

$$\text{Par unité de poids : } Ep' = \frac{Ep}{\gamma \cdot W} = \frac{P}{W} [m]$$

III.4.3. Dissipation visqueuse (perte d'énergie) :

- Les liquides réels, en raison de leur viscosité, subissent des pertes d'énergie par frottement interne. Cela entraîne une diminution de l'énergie mécanique, qui est partiellement convertie en chaleur.

III.4.4. Énergie interne (dissipation visqueuse) :

- Dans les liquides réels (visqueux), une partie de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle) est convertie en chaleur à cause des frottements internes. Cette dissipation d'énergie est liée à la viscosité du fluide, qui résiste à l'écoulement. L'énergie interne peut être augmentée par des pertes dues à la friction entre les couches du fluide.

III.4.5. Représentation dans le diagramme :

Le **théorème de Bernoulli** est souvent utilisé pour expliquer l'échange entre l'énergie cinétique, potentielle, et de pression, mais il est modifié dans le cas des fluides réels pour inclure les pertes dues à la viscosité.

Dans un diagramme d'énergie pour des liquides réels, on peut voir les variations de ces différentes formes d'énergie le long d'une ligne d'écoulement. Par exemple :

- En amont, la vitesse pourrait être plus faible (donc énergie cinétique faible) et la pression plus élevée.
- En aval, si le liquide s'accélère (énergie cinétique augmente), la pression diminue, et il y aura des pertes d'énergie sous forme de chaleur à cause de la viscosité.

Ces diagrammes permettent d'analyser l'efficacité des systèmes où les liquides s'écoulent, comme les conduites, les pompes, ou les turbines.

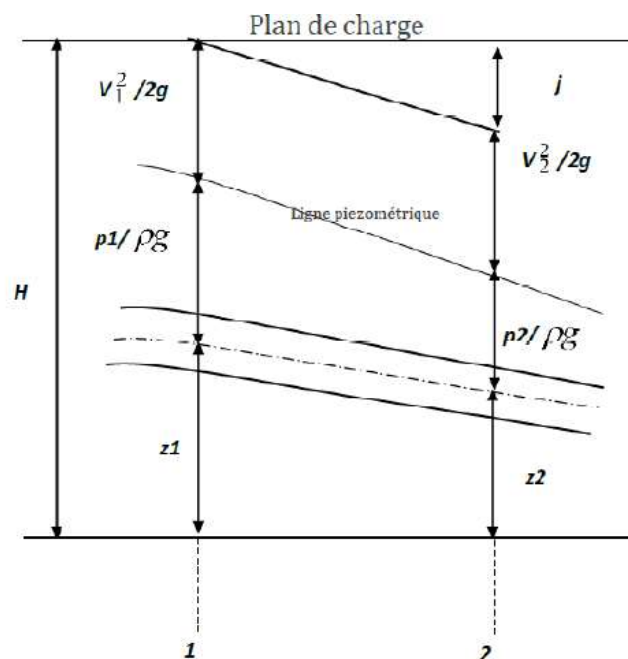


Figure III.4. Diagramme d'énergie

• Diagramme de Moody

L'utilisation directe de la formule de Colebrook demanderait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations :

- postuler une valeur de f ;
- calculer le terme de droite ;
- en déduire une nouvelle valeur de f à partir du terme de gauche ;
- l'intégrer dans le terme de droite, et ainsi de suite.

Généralement, on obtient convergence après 3 ou 4 boucles.

La meilleure alternative à ce calcul itératif est d'utiliser directement le diagramme de Moody. Il s'agit d'un abaque de calcul direct du coefficient de perte de charge, à partir du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la paroi interne de la conduite.

Diagramme de Moody-Stanton reliant le coefficient de perte de charge régulière (λ) (au nombre de Reynolds (R_e) et à la rugosité relative ($\frac{\epsilon}{D}$).

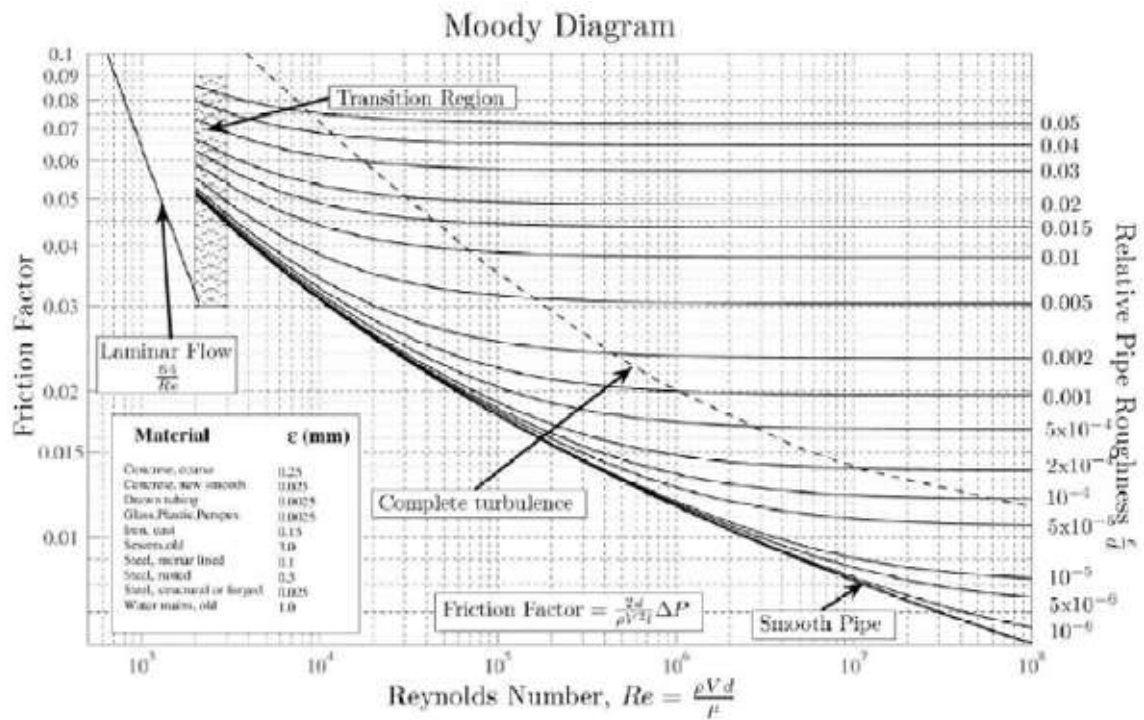


Figure III.4. Diagramme de Moody

Pour s'en servir, il faut préalablement calculer le nombre de Reynolds et la rugosité relative. Une fois que ces grandeurs sont connues, on peut lire directement le coefficient de perte de charge sur le graphique.

Chapitre IV : Les régimes d'écoulement dans les conduites, résistances hydrauliques

Objectifs :

Au terme de ce chapitre, l'étudiant devra être capable de :

- Distinguer les différents régimes d'écoulement (laminaire, transitoire, turbulent) et utiliser le nombre de Reynolds pour les identifier.
- Décrire et analyser les caractéristiques des écoulements laminaires et turbulents, notamment les profils de vitesse et l'influence de la viscosité et de la rugosité.
- Appliquer les principales lois et formules utilisées pour calculer les coefficients de frottement
- Comprendre et interpréter l'expérience de Reynolds afin d'expliquer la transition entre les régimes d'écoulement.
- Utiliser la formule de Manning Strickler pour évaluer les pertes de charge dans les conduites en écoulement gravitaire.

Chapitre IV : Les régimes d'écoulement dans les conduites, résistances hydrauliques

Introduction :

L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide parfait. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel...etc.)

IV.1. Régime laminaire – régime turbulent

IV.1.1. Cas de l'écoulement laminaire : $Re < 2100$

On peut aisément déterminer le profil de vitesse obtenu lors de l'écoulement stationnaire d'un liquide newtonien dans un tuyau cylindrique. On suppose que les filets de courant conservent leur indépendance tout au long de l'écoulement, ils ne se mélangent pas. Un tel type d'écoulement est dit **laminaire**.

L'écoulement **laminaire** est un écoulement stratifié qui se fait sans brassage des particules liquides et sans pulsation des vitesses (sans changement brusque). Dans le cas d'un écoulement laminaire d'un liquide dans une conduite à section constante et rectiligne, les lignes de courant sont parallèles à l'axe de la conduite ce qui implique qu'elles sont aussi rectilignes.

Le régime laminaire est un régime parfaitement ordonné et qui est permanent si la pression initiale est constante.

En régime laminaire, seules les forces de viscosité interviennent dans le calcul du coefficient λ . Etant donnée, la vitesse est très faible, l'état de la surface n'intervient pas et donc le coefficient λ est uniquement fonction du nombre de Reynolds Re .

Les régimes laminaires se rencontrent chaque fois que les conduites ou il y'a écoulement de liquide très visqueux tel que : les huiles de graissage et les mélanges à base de glycérine.

IV.1.1.1. Théorie de l'écoulement laminaire :

L'écoulement laminaire obéit à la loi de frottement de NEWTON qui sert de base pour sa théorie ; l'égalité entre la force de pression et de frottement s'exerçant sur l'enveloppe cylindrique de diamètre (2r) :

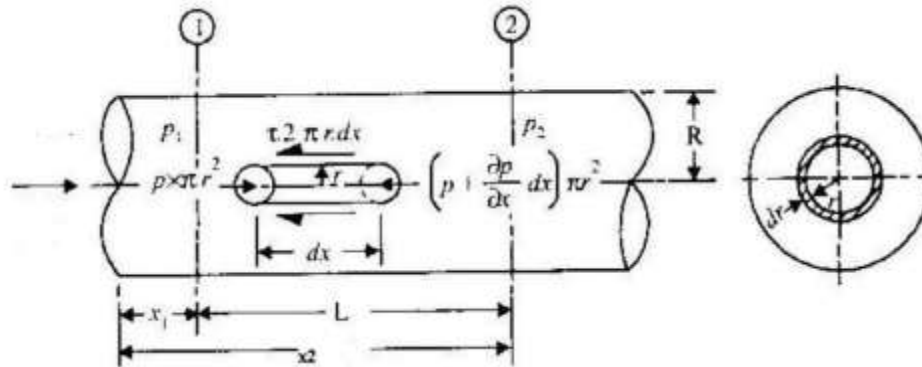


Figure IV.1. Ecoulement laminaire

$$(P_1 - P_2) \pi r^2 = \tau \cdot 2 \pi r L$$

$$\text{Donc : } \tau = \frac{(P_1 - P_2)}{L} \cdot \frac{r}{2} = \frac{\Delta P_f}{L} \cdot \frac{r}{2}$$

$$\text{Si } r=0, \text{ on a : } \tau(r=0) = 0$$

$$\text{Si } r=R, \text{ on a : } \tau(r=R) = \tau_p = \frac{\Delta P_f}{L} \cdot \frac{r}{2}$$

D'après la loi de NEWTON :

$$\tau = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} = -\mu \frac{\Delta v}{\Delta r} \quad (\text{Lorsque } r \text{ augmente, } r \text{ diminue})$$

$$\text{D'où : } \frac{r}{2} \cdot \frac{\Delta P_f}{L} = -\mu \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

N.B : La présence du signe négatif dans l'expression $\tau = -\mu(\Delta v/\Delta r)$ provient de la nature directionnelle des grandeurs impliquées et de la manière dont les forces s'opposent au mouvement selon la **loi de Newton pour la viscosité**.

Le signe négatif garantit que l'expression est cohérente avec le fait que les forces visqueuses opposent toute variation de vitesse dans le fluide. Cela est conforme à la deuxième loi de Newton, où une force agit pour réduire l'accélération relative (ou le gradient ici).

Donc : Le signe négatif dans $\tau = -\mu \frac{\Delta v}{\Delta r}$ est nécessaire pour refléter que la force de cisaillement visqueuse agit toujours **contre** le gradient de vitesse. Autrement dit, la viscosité résiste aux variations de vitesse entre les couches du fluide.

- $(\frac{\Delta v}{\Delta r})$: mesure comment la vitesse change spatialement dans le fluide.
- Si r est une coordonnée radiale (comme dans un écoulement cylindrique), v est la vitesse tangentielle (ou parallèle) au déplacement fluide.
- Le gradient peut être positif ou négatif en fonction de la manière dont v varie par rapport à r .

L'accroissement de la vitesse s'écrit : $dv = -\frac{r \cdot \Delta P_f \cdot dr}{2\mu L} = -\frac{\Delta P_f}{2\mu L} \cdot r \cdot dr$

$$v = \int dv = -\frac{\Delta P_f}{2\mu L} \int r \cdot dr = -\frac{\Delta P_f}{2\mu L} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

Utilisons les conditions aux limites : $V(r=R)=0$, vitesse nulle à la paroi ; on obtient :

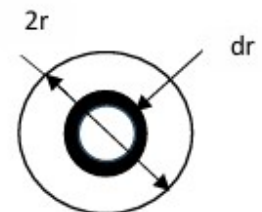
$$-\frac{\Delta P_f}{2\mu L} \cdot \frac{R^2}{2} + C = 0 \quad \text{d'où : } C = \frac{\Delta P_f}{4\mu L} \cdot R^2$$

Et l'expression de la vitesse (v) sera : $v = \frac{\Delta P_f}{4\mu L} (R^2 - r^2)$ d'où :

$$v(r=0) = v_{\max} = \frac{\Delta P_f}{4\mu L} \cdot R^2 \quad \text{et} \quad v(r=R) = 0$$

Calculons maintenant le débit unitaire (dQ) :

$$\begin{aligned} dQ &= v \cdot dS = v \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \\ dQ &= \frac{\Delta P_f}{4\mu L} (R^2 - r^2) 2\pi \cdot r \cdot dr \\ dQ &= \int \frac{\Delta P_f}{4\mu L} (R^2 - r^2) 2\pi \cdot r \cdot dr \\ Q &= \frac{\Delta P_f \cdot 2\pi}{4\mu L} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right] \end{aligned}$$



Pour toute la conduite ($r=R$), on aura :

$$Q = \frac{\Delta P_f \cdot 2\pi \left[\frac{R^4}{4} \right]}{4\mu L}$$

Ainsi la **vitesse moyenne** s'écrit : $v_m = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\pi \Delta P_f \cdot R^4}{8\mu L \pi R^2} = \frac{\Delta P_f}{8\mu L} \cdot R^2$

Donc :
$$v_m = \frac{1}{2} v_{\max}$$

IV.1.1.1.a. Détermination de la loi de résistance hydraulique :

La résistance hydraulique est une grandeur caractérisant une conduite et permettant de calculer la perte de charge subie par un fluide s'écoulant dans la conduite.

$$\Delta H_f = f(Q, D, L)$$

$$Q = \frac{\Delta P_f}{8\mu L} \pi R^4 \Rightarrow \Delta P_f = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4}$$

Sachant que : $v = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow \mu = v \cdot \rho$ et $\gamma = \rho \cdot g \Rightarrow \rho = \frac{\gamma}{g}$

Donc :
$$\Delta P_f = \frac{8v\rho L Q}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4} = \frac{8v\gamma L Q}{g\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4}$$

L'expression de ΔH_f s'écrira :
$$\Delta H_f = \frac{\Delta P_f}{\gamma} = \frac{8v\gamma L Q}{\gamma g\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4} = \frac{128vLQ}{g\pi D^4}$$

$$\Delta H_f = \frac{128vLQ}{g\pi D^4}$$

L'expression trouvée est valable en régime laminaire pour les conduites circulaires est appelée « Loi de HAGEN POISEUILLE »

$$\Delta H_f = \frac{128vLQ}{g\pi D^4} = \lambda \frac{L v_m^2}{D 2g}$$

$$\lambda = \frac{128vLQ}{g\pi D^4} \cdot \frac{2gD}{Lv_m^2} = \frac{128v v_m \frac{\pi D^2}{4} \cdot 2}{\pi D^3 v_m^2}$$

Donc :

$$\text{Sachant que : } R_e = \frac{v_m \cdot D}{\nu} = \frac{\rho v_m \cdot D}{\mu} \Rightarrow \lambda = \frac{64}{R_e} \quad \text{avec } R_e : \text{nombre de Reynolds}$$

IV.1.2. Cas de l'écoulement turbulent : $Re > 3000$

A l'opposé du régime laminaire, le régime turbulent s'accompagne d'un brassage intense des particules liquides et de grandes pulsations de vitesses et de pression. Dans ce cas, les lignes de courant sont de forme très compliquée.

Les exemples d'écoulement turbulent sont les écoulements d'eau, d'alcool, de pétrole, d'acide, ...etc ;

En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds (R_e) est grand. Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds (R_e) et de la rugosité (ϵ) de la conduite.

La configuration géométrique de la surface exerce une influence bien déterminée sur l'écoulement.

Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires. Elles sont caractérisées par une certaine hauteur k .

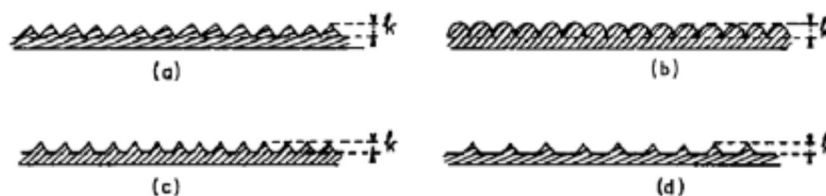


Figure IV.2. Écoulement turbulent à travers des sections rugueuses

On définit ainsi deux types de rugosité : lisse et rugueuse. La différence entre les deux dépend du nombre de Reynolds.

En raison de la complexité des écoulements turbulents et de la difficulté que présente leurs études, il n'existe presque pas à actuellement une théorie suffisamment stricte pour les prédire. Il a été donc fait appel aux théories approchées dites semi-empiriques.

En pratique, l'étude des écoulements turbulents est basée sur les résultats expérimentaux qui sont systématisées à l'aide de la théorie de la similitude numérique.

Voici quelques formules empiriques pour le calcul du coefficient(λ) :

a) Conduites lisses :

a.1) Formule de P. KONAKOV :

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \cdot \log R_e - 1,5)^2}$$

Avec $Re = 2100$

a.2.) Formule de BLASIUS :

$$\lambda = 0,3164(R_e)^{-0,254} \quad \text{et} \quad 2300 < R_e < 10^5$$

a.3) Formule de PRANDT-KARMAN :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(R_e \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad \text{et} \quad R_e \approx 3 \cdot 10^6$$

Sachant que la formule de PRANDT -KARMAN nécessite un processus itératif pour la détermination de λ

a.4) Formule de NIKURADSE :

$$\lambda = \frac{0,221}{(R_e)^{0,237}} + 0,0032 \quad \text{et} \quad R_e > 10^5$$

b) Conduites rugueuses :

b.1) Formule de A. ALTCHOUL (universelle)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \cdot \log_{10} \left(\frac{R_e}{R_e \cdot \frac{K'}{d} + 7} \right)$$

Avec :

d : diamètre de la conduite

K' : la rugosité

$\frac{K'}{d}$: Rugosité relative

b.2) Formule de COLEBROOK :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,7d} + \frac{2,51}{R_e \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$$

La formule de COLEBROOK peut être résolue par l'utilisation d'abaques ou de diagramme de MOODY.

IV.2 Régimes d'écoulement, expérience de Reynolds

La connaissance du régime d'écoulement d'un fluide est un point clé en génie des procédés, car il a une influence sur la plupart des phénomènes, en particulier les transferts de chaleur, de matière, les pertes de charges etc...

En 1883 Osborne Reynolds (1842-1912) professeur de l'ingénierie à l'université de Manchester a réalisé des expériences lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne. En injectant sur l'axe de la conduite un colorant il a remarqué qu'à faible vitesse, le colorant reste concentré très près de l'axe, caractéristique d'un écoulement stable laminaire (a), puis à vitesse/débit plus important, des structures tourbillonnaires se forment, de plus en plus énergétiques, provoquant une diffusion rapide due à la turbulence (b et c) qui prend largement le dessus sur la diffusion moléculaire à peine observable à faible vitesse.

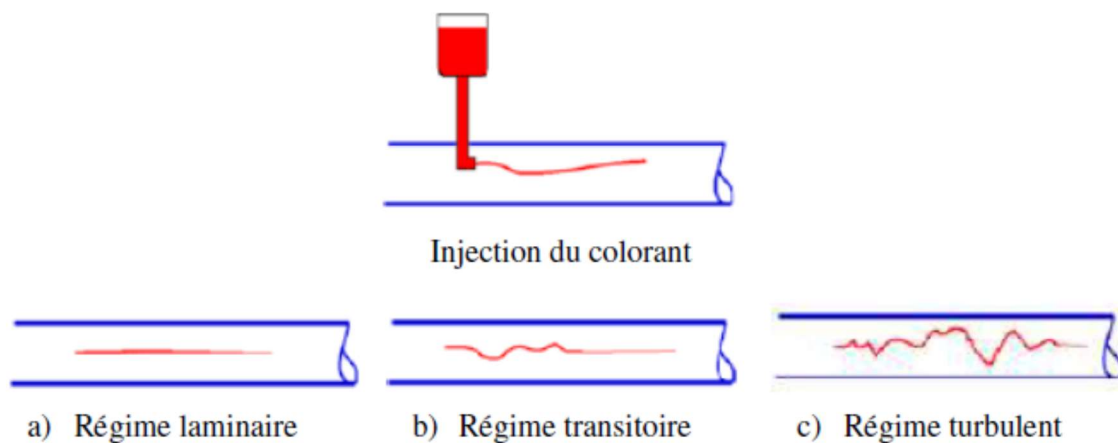


Figure IV.3. Expérience de Reynolds

En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de

Reynolds (R_e). Il exprime le rapport entre la force d'inertie ($\rho.v^2$) et la force visqueuse ($\mu \cdot \frac{v}{d}$).

Il est donné par la relation suivante :

$$R_e = \frac{\text{Forced'inertie}}{\text{Forcevisqueuse}} = \frac{\rho.v.d}{\mu} = \frac{v.d}{\eta}$$

V: Vitesse moyenne d'écoulement en m/s

d : Diamètre de la conduite en m

μ : Viscosité dynamique du fluide en N.m⁻².s

η : Viscosité cinématique du fluide en m²/s.

_ Si $Re < 2000$: l'écoulement est laminaire.

_ Si $2000 < Re < 3000$: l'écoulement est transitoire.

_ Si $Re > 3000$: l'écoulement est turbulent.

Ces valeurs peuvent varier légèrement d'un ouvrage à un autre, mais en pratique, les valeurs ne laissent pas d'ambiguïté. Elles seront franchement supérieures ou inférieures à ces limites.

Dans les écoulements turbulents, la valeur de (R_e) est très importante et peut atteindre 10⁵ jusqu'à 10⁸.

- **Cas des conduites non-circulaire**

Dans le cas où la conduite **n'est pas circulaire**, on définit ce que l'on appelle le diamètre hydraulique d_H :

$$d_H = 4. \frac{\text{section droite de la conduite}}{\text{périmètre mouillé}}$$

On peut également définir le rayon hydraulique r_H en correspondance avec le **rayon** de la conduite r:

$$r_H = \frac{\text{section droite occupée par le fluide}}{\text{périmètre mouillé}}$$

- dans le cas d'une **conduite circulaire** de diamètre d, on retrouve $d_H = d$.

- dans le cas d'une **conduite carrée**, le diamètre hydraulique n'est autre que le côté du carré.

- pour un fluide circulant dans un espace **annulaire**, on peut montrer que $d_H = 2.e = d_{ext} - d_{it}$, où (e) est l'épaisseur de l'espace annulaire.

IV. 3. Calcul de pertes de charges application de l'équation de MANNING

IV. 3. 1. Introduction aux pertes de charge

Les pertes de charge représentent l'énergie dissipée sous forme de chaleur et de turbulence lorsqu'un fluide s'écoule à travers une conduite ou un canal. Elles se divisent en deux catégories principales :

- **Pertes de charge linéaires** : dues à la friction avec les parois de la conduite.
- **Pertes de charge singulières** : dues aux éléments comme les coudes, vannes, rétrécissements, etc.

La formule de **Manning** est particulièrement utile pour les écoulements gravitaires dans des conduites ouvertes ou partiellement remplies.

IV. 3. 2. Amélioration de la formule de Chezy

Manning, au 19ème siècle, a amélioré la formule de Chézy en identifiant un coefficient de rugosité "K" indépendant du taux de remplissage de la canalisation.

Ce coefficient de rugosité "K", est appelé aussi coefficient de Strickler.

IV. 3. 2.1. Formule de Manning

La relation qui estime la perte de charge est donnée par la relation suivante :

$$J = \frac{V^2}{K^2 \cdot R_H^{4/3}}$$

Avec :

J : perte de charge linéaire en mCE / m

V : vitesse débitante en m / s

K : coefficient de rugosité de Manning-Strickler

$$J = \frac{C^2}{R_H^{1/6}}$$

C : coefficient de rugosité de Chézy en $m^{0,5}/s$

R_H : rayon hydraulique de l'écoulement en m

La formule de Manning est très utilisée aujourd'hui pour les calculs de réseaux afin de dimensionner les canalisations.

IV. 3. 2.2. Formule pratique de Manning

Dans la pratique des calculs, en l'associant à la relation de Bernoulli, $i=j$ il est possible d'exprimer la vitesse débitante en fonction du rayon hydraulique « R_h » et la pente « i ».

Cette formule est très pratique pour déterminer la vitesse débitante dans une canalisation connaissant :

- Sa rugosité
- Sa pente
- Et son profil de remplissage

$$V = K \cdot R_H^{2/3} \cdot i^{1/2}$$

Avec:

V: vitesse débitante en m / s

K : coefficient de rugosité de Manning Strickler

R_h : rayon hydraulique de l'écoulement en m

i : pente de l'écoulement en m / m

Applications

Applications

Chapitre I : Hydrostatique

Application N° I. 01 :

La densité de l'eau de mer est $d = 1,03$ à $4\text{ }^\circ\text{C}$. Déterminer son poids et sa masse spécifique, On donne $w_{eau} = 9810\text{ N/m}^3 \approx 10^4\text{ N/m}^3$.

Application N° I. 02 :

Si le poids volumique d'un liquide est $8,1\text{ kN/m}^3$, quelle est sa densité. On donne la masse volumique de l'eau qui est 1000 kg/m^3 .

Application N° I. 03 :

Calculer le coefficient d'élasticité (ou module de compressibilité) (E) de l'eau d'après les données expérimentales suivantes :

A 35 Kg/cm^2 , le volume est de 30 dm^3

A 250 Kg/cm^2 , le volume est de $27,9\text{ dm}^3$

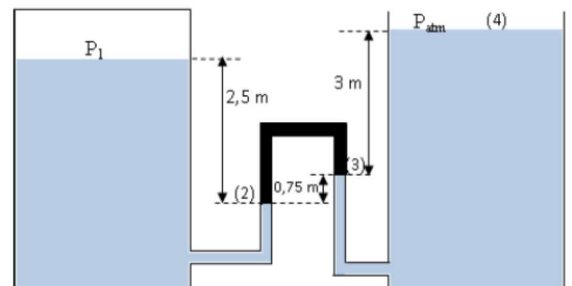
Déduire la valeur du coefficient de compressibilité ($\chi = 1/E$)

Application N° I. 04 :

Calculer la pression absolue et la pression effective (relative) à une profondeur de ($h=11\text{ m}$) sous la mer sachant que la masse volumique de l'eau de mer est $\rho_{mer} = 1030\text{ kg/m}^3$

Application N° I. 05 :

Soient deux réservoirs d'eau qui sont reliés entre eux par un manomètre contenant du mercure ($d_{Hg}=13,6$).
Calculer la pression P_1 du réservoir gauche.



Application N° I. 06 :

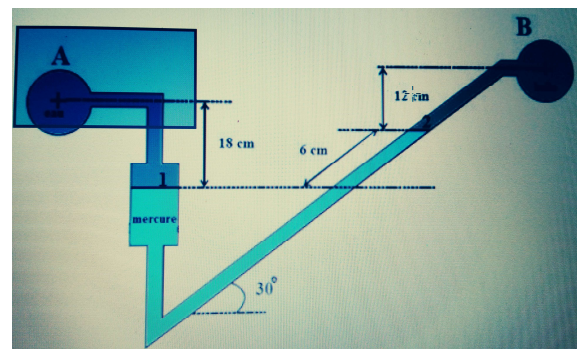
Soit le manomètre incliné de la figure ci-contre permettant de mesurer la différence de pression entre (A) et (B). Celui-ci est composé de trois fluides :

Eau : $\rho_{eau} = 1000\text{ kg/m}^3$

Mercure : $\rho_{Hg} = 13600\text{ kg/m}^3$

Huile : $\rho_{huile} = 900\text{ kg/m}^3$

Déterminer la différence de pression entre (A) et (B)



Application N° I. 07 :

Un réservoir est équipé par deux vannes rectangulaires (3m ×6m) en AB et CD de la figure N°01.

1. Calculer la force de pression sur AB et CD
2. Déterminer le centre de poussée sur AB et CD
3. La vanne CD est remplacée par une vanne circulaire, quel serait le diamètre de la vanne pour garder la même force calculée en (1)
4. Déterminer le nouveau centre de poussée su CD

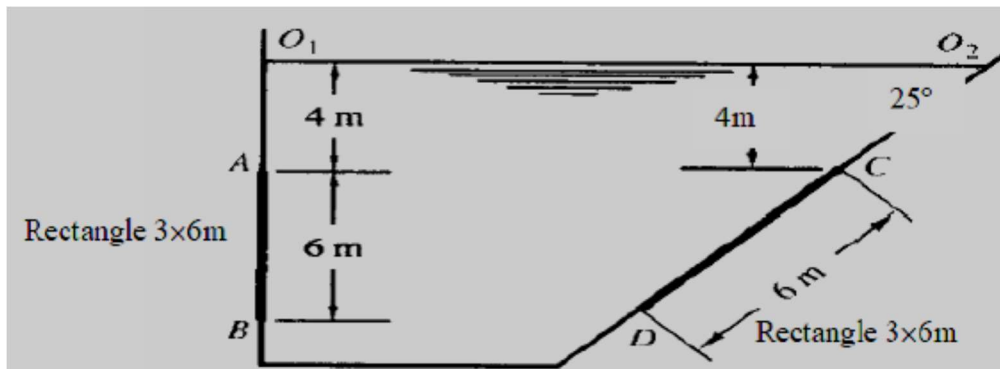


Figure N°

Solutions des Applications Chapitre I : Hydrostatique

Solution de l'Application N° I.1 :

1) Soit $d = 1,03$ à $4^\circ C$ et $\omega_{eau} = 9810 N / m^3 \approx 10^4 N / m^3$

Sachant que: $\omega_{eaudemer} = \omega_{liquide}$ on a : $d = \frac{\omega_{liquide}}{\omega_{eau}}$ d'où: $\omega_{liquide} = d \cdot \omega_{eau}$

Ainsi : $\omega_{liquide} = 1,03 \cdot 9810 = 10104,3 N / m^3$

2) $\omega_{liquide} = \rho_{liquide} \cdot g \Rightarrow \rho_{liquide} = \frac{\omega_{liquide}}{g} = \frac{10104,3}{9,81} = 1030 kg / m^3$

Solution de l'Application N° I.2 :

La masse volumique du liquide égale a :

$$\rho = \frac{\omega}{g} = \frac{8100}{9,81} = 825,68 kg / m^3$$

Donc la densité vaut :

$$d = \frac{825,68}{1000} = 0,825$$

Solution de l'Application N° I.3 :

Pour $\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 35 \text{ Kg} / \text{cm}^2 \rightarrow V_1 = 30 \text{dm}^3 ; \\ P_2 = 250 \text{ Kg} / \text{cm}^2 \rightarrow V_2 = 29,7 \text{dm}^3 \end{array} \right.$

on a : $E = \frac{-V_1(P_2 - P_1)}{V_2 - V_1} = \frac{-30(250 - 35) \cdot 10^3}{(29,7 - 30) \cdot 10^3} = 21500 \text{ Kg} / \text{cm}^2$

D'où : $\chi = \frac{1}{E} = \frac{1}{21500} = 4,65 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} / \text{cm}^2 = 4,65 \text{ Pa}^{-1}$

Solution de l'Application N° I.4 :

$$P^{effective} = \omega_{mer} \cdot h = \rho_{mer} \cdot g \cdot h = 1030 \text{ kg} / \text{m}^3 \cdot 9,81 \text{ m} / \text{s}^2 \cdot 11 \text{m} = 111147,3 \text{ Pa} = 1,11 \text{ bar}$$

$$P^{absolue} = P^{eff} + P^{atm} = 111147,3 + 10^5 = 211147,3 \text{ Pa} = 2,11 \text{ bars}$$

Solution de l'Application N° I.5 :

En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique (EFH) entre les points (1) et (2) ; (2) et (3) et enfin entre (3) et (4) ; on obtient :

$$P_2 = P_1 + \rho g \cdot (2,5) \dots \dots \dots (1)$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot (0,75) \dots \dots \dots (2)$$

$$P_3 = P_4 + \rho \cdot g \cdot (3) \dots \dots \dots (3)$$

Vu que la pression (P_1) est une pression manométrique, on néglige la pression atmosphérique ($P_4 = 0$), d'où :

$$P_2 = P_1 + \rho g \cdot (2,5) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{de (3)} : P_3 = P_4 + \rho \cdot g \cdot 3 = \rho \cdot g \cdot 3 = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 3 = 29430 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow P_2 = P_3 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot (0,75).$$

$$\text{avec : } d_{Hg} = \frac{\rho_{Hg}}{\rho} \Rightarrow \rho_{Hg} = d_{Hg} \cdot \rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{donc : } P_2 = 29430 + 13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot (0,75) = 129492 \text{ Pa}$$

$$\text{Tirons de (1) : } P_1 = P_2 - \rho g \cdot (2,5) = 129492 - 10^3 \cdot 9,81 \cdot 2,5 = 104967 \text{ Pa} \approx 1,05 \text{ bar}$$

Solution de l'Application N° I.6 :

En appliquant l'équation fondamentale de l'Hydrostatique entre A et 1 et puis entre B et 2, on obtient :

$$P_1 = P_A + \rho \cdot g \cdot (0,18) \dots \dots \dots (1)$$

$$P_1 = P_2 + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \sin 30^\circ \cdot (0,06) \dots \dots \dots (2)$$

$$P_2 = P_B + \rho_{huile} \cdot g \cdot (0,12) \dots \dots \dots (3)$$

En remplaçant (3) et (1) dans (2), on obtient :

$$P_A + \rho \cdot g \cdot (0,18) = P_B + \rho_{huile} \cdot g \cdot (0,12) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \sin 30^\circ \cdot (0,06)$$

$$\text{Donc : } P_A - P_B = \rho_{huile} \cdot g \cdot (0,12) + \rho_{Hg} \cdot g \cdot \sin 30^\circ \cdot (0,06) - \rho \cdot g \cdot (0,18)$$

$$\text{A.N: } P_A - P_B = 900 \cdot 9,81 \cdot (0,12) + 13600 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \cdot (0,06) - 1000 \cdot 9,81 \cdot (0,18)$$

$$P_A - P_B = 3296,16 \text{ Pa}$$

Solution de l'Application N° I.7 :

1) Et 2) Calcul de la force de pression sur AB et CD et les centres de pression de poussée :

- La surface AB : $F_{AB} = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S$

$$\text{Avec : } h_G = 4 + 3 = 7 \text{ m} \quad \text{et} \quad S = 3 \times 6 = 18 \text{ m}^2$$

$$\text{Donc : } F_{AB} = 1000 \times 9,81 \times 7 \times 18 = 1,236 \text{ MN}$$

$$\text{Et : } Y_p = Y_G + \frac{I_{xG}}{Y_G \cdot S} = 7 + \frac{3 \times 6^3 / 12}{7 \times 18} = 7,43 \text{ m} \text{ suivant l'axe } O_1$$

- La surface CD : $F_{CD} = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S$

$$\text{Avec : } h_G = 4 + 3 \sin 25^\circ = 5,26 \text{ m} \quad \text{et} \quad S = 3 \times 6 = 18 \text{ m}^2$$

Donc: 4R

$$\text{Et : } Y_p = Y_G + \frac{I_{xG}}{Y_G \cdot S}$$

$$\text{Avec: } Y_G = \frac{h_G}{\sin 25^\circ} = \frac{5,26}{\sin 25^\circ} = 12,45m$$

D'où : 3

$$3) \text{ La surface CD est circulaire : } F = \rho \cdot g \cdot h_G \cdot S$$

$$\text{Avec : } h_G = 4 + R \sin 25^\circ \text{ et } S = \pi \cdot R^2$$

$$\text{Donc: } F = \rho \cdot g (4 + 0,422R) \pi R^2 \Rightarrow 4R^2 + 0,422R^3 = \frac{F}{\rho g \pi} = \frac{928,81 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9,81 \cdot 3,14} = 30,15$$

$$\text{On obtient enfin: } R^3 + 9,47R^2 - 71,44 = 0$$

Par interpolation, on obtient: $R \approx 2,45m$

Donc, le diamètre CD est : $D=4,9m$ et

$$Y_p = Y_G + \frac{I_{xG}}{Y_G \cdot S} = \frac{h_G}{\sin 25^\circ} + \frac{\pi R^4 / 4}{11,92 \cdot \pi R^2} = 11,92 + \frac{(2,45)^2}{11,92 \cdot 4} = 12,05m \text{ suivant l'axe } O_2$$

Chapitre II : Equations fondamentales de l'Hydrodynamique

Application N° II.1 :

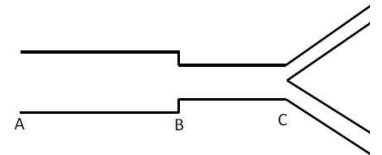
Quelle est la vitesse moyenne de l'eau circulant dans une conduite de 15 cm de diamètre avec un débit de 3800 m³ par jour

Application N° II.2 :

De l'eau s'écoule à une vitesse uniforme de 2 m/s dans une conduite AB de d₁=1,5 m de diamètre reliée a une conduite BC de d₂=1,2 m de diamètre (voir figure N° 1). Au point C la conduite se sépare en deux parties. La première CD a un diamètre de d₃=0,8 m et transporte le tiers de l'écoulement total. La vitesse dans la seconde CE est 2,5 m/s. Calcule :

1. Le débit dans AB ;
2. La vitesse dans BC ;
3. La vitesse dans CD ;
4. Le diamètre CE.

Figure N° 1



Application N° II.3 :

Dans le tube de Venturi représenté sur le schéma de la figure N° 2, l'eau s'écoule de bas en haut. Le diamètre du tube en A est $d_A = 30\text{cm}$, et en B il est de $d_B = 15\text{cm}$. Afin de mesurer la pression P_A au point A et la pression P_B au point B, deux manomètres à colonne d'eau sont connectés au Venturi. Ces tubes piézométriques sont gradués et permettent de mesurer les niveaux $Z_{A'} = 3,061\text{m}$ et $Z_{B'} = 2,541\text{m}$ respectivement des surfaces libres A' et B'.

On donne :

- L'altitude de la section A : $Z_A = 0\text{ m}$,
- L'altitude de la section B : $Z_B = 50\text{ m}$,
- L'accélération de la pesanteur $g = 9,81\text{ m/s}^2$,
- La pression au niveau des surfaces libres $P_{A'} = P_{B'} = P_{atm} = 1\text{bar}$
- La masse volumique de l'eau est $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$.

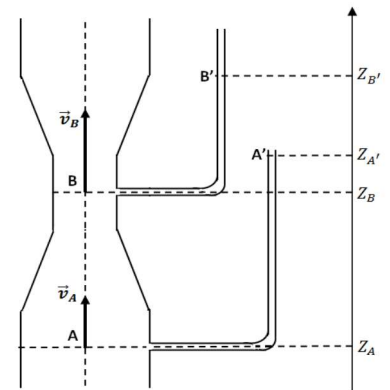


Figure N° 2

On suppose que le fluide est parfait.

- 1) Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique entre A' et B', et calculer la pression P_B au point B.
- 2) De même, calculer la pression P_A au point A.
- 3) Ecrire l'équation de continuité entre les points A et B. En déduire la vitesse d'écoulement v_B en fonction de v_A .
- 4) Ecrire l'équation de Bernoulli entre les points A et B. En déduire la vitesse d'écoulement v_B .

Solutions des Applications Chapitre II : Equations fondamentales de l'Hydrodynamique

Solution de l'Application N° II.1 :

$$\text{Soit: } Q = V_m \cdot S \Rightarrow V_m = \frac{Q}{S}$$

$$\text{Avec: } S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0,15)^2}{4}$$

Or: 3

Solution de l'Application N° II.2 :

$$\text{Soit: } Q = V \cdot S = V \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = 2x \frac{3,14x(1,5)^2}{4} = 3,53m/s$$

$$Q = V_{BC} \cdot S_{BC} \Rightarrow V_{BC} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4x3,53}{3,14x(1,2)^2} = 3,12m/s$$

$$Q_{CD} = \frac{Q}{3} = 1,176m^3/s \Rightarrow V_{CD} = \frac{4x1,176}{3,14x(0,8)^2} = 2,34m/s$$

$$Q = Q_{CD} + Q_{CE} \Rightarrow Q_{CE} = \frac{2}{3}Q = 2,354m^3/s$$

$$Q_{CE} = V_{CE} \cdot \frac{\pi d_4^2}{4} \Rightarrow d_4 = \sqrt{\frac{4Q_{CE}}{\pi \cdot V_{CE}}} = 1,095m/s$$

Solution de l'Application N° II.3 :

1) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre B et B' :

$$P_B - P_{B'} = \rho \cdot g(Z_B - Z_{B'}) \Rightarrow P_B = P_{B'} + \rho \cdot g(Z_B - Z_{B'})$$

$$\text{A.N: } P_B = 10^5 + 1000 \times 9,81 \times (2,541 - 0,5) = 120001Pa = 1,2bar$$

2) Relation fondamentale de l'hydrostatique entre A et A' :

$$P_A = P_{A'} + \rho \cdot g(Z_A - Z_{A'})$$

$$\text{A.N: } P_A = 10^5 + 1000 \times 9,81 \times (3,061 - 0) = 130007Pa = 1,3bar$$

3) Equation de continuité:

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \Rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A = \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2 \cdot v_A \Rightarrow v_B = 4v_A$$

4) Equation de Bernoulli :

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \Rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A = \left(\frac{d_A}{d_B} \right)^2 \cdot v_A \Rightarrow v_B = 4$$

$$\frac{v_A^2 - v_B^2}{2} + \frac{P_A - P_B}{\rho} + g \cdot (Z_A - Z_B) = 0 \quad \text{avec: } v_B = 4v_A$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{(4)^2 - 1} \cdot \left(\frac{P_A - P_B}{1000} \right) + \rho \times (Z_A - Z_B)}$$

Donc:

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{(4)^2 - 1} \cdot \left(\frac{1,3 \cdot 10^5 - 1,2 \cdot 10^5}{1000} \right) + 9,81 \times (0 - 0,5)} = 0,8246 \text{ m/s}$$

Chapitre III : Dynamique des liquides réels

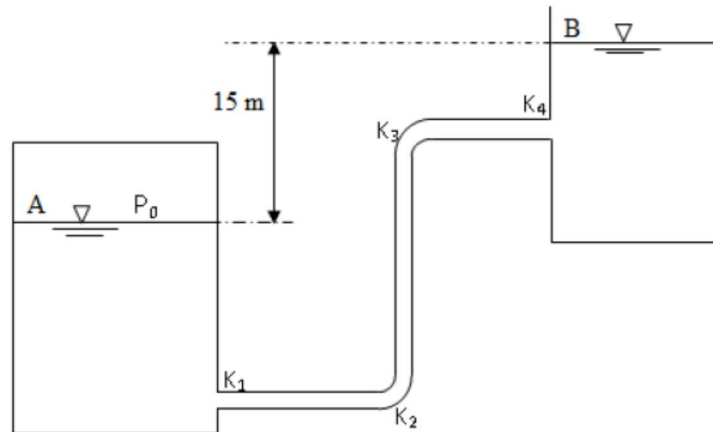
Application N° III.1 :

Grâce à une surpression P_0 , l'eau circule du réservoir A vers le réservoir B au moyen d'une conduite de diamètre $d = 300$ mm de rugosité $\varepsilon = 0,3$ mm et de longueur $L = 170$ m.

Les coefficients des pertes de charges singulières sont $\xi_1 = K_1 = 0,5$ à la sortie du réservoir A, $\xi_2 = K_2 = \xi_3 = K_3 = 0,15$ pour les deux coudes et $\xi_4 = K_4 = 1$ à l'entrée du réservoir B.

Déterminez la pression manométrique P_0 pour avoir un débit de $Q = 200$ l/s. utiliser le diagramme de Moody. On donne : $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et $\nu = 1,005 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$

Remarque



Application N° III.2 :

Dans le circuit hydraulique représenté sur la figure N° 03, on donne :

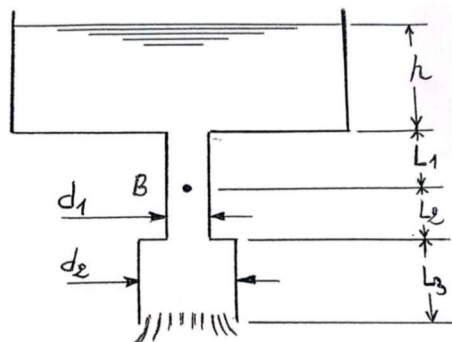
$h = 5$ m ; $L_1 = 4$ m ; $L_2 = 10$ m ; $L_3 = 3$ m ; $d_1 = 100$ mm ; $d_2 = 150$ mm.

Les coefficients de pertes de charge linéaires des deux conduites se calculent par l'expression :

$$\lambda = 0,02 + 0,5 / D \quad [D \text{ en mm}]$$

On néglige les pertes de charges locales.

Calculer le débit volumétrique et la pression effective au point B.



Solutions des Applications Chapitre III : Dynamique des liquides réels
Solution de l'Application N° III.1 :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B + \Delta H$$

On a : $Z_A = 0; Z_B = 15m; P_B = P_{atm}$ et $P_A = P_0$ et $V_A = V_B = 0$ (Niveau d'eau constant)

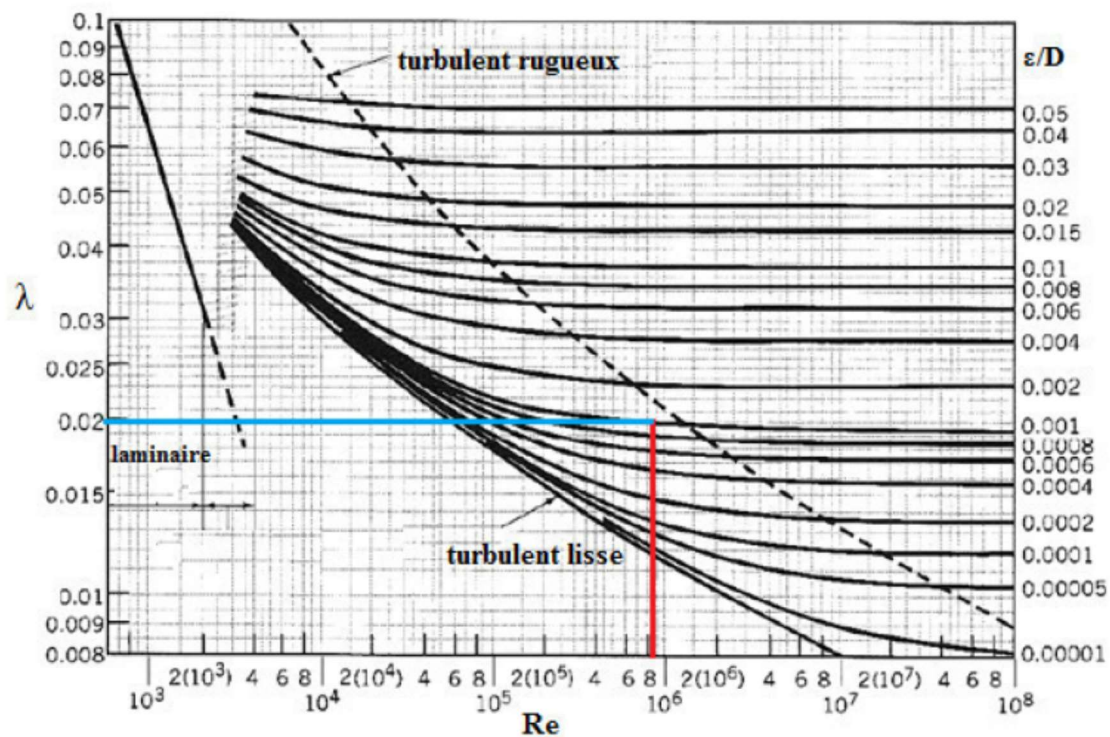
$$\text{Donc : } \frac{P_0}{\rho g} = 15 + \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \frac{V^2}{2g}$$

$$V = \frac{Q}{S} = 4 \cdot \frac{0,2}{3,14 \times (0,3)^2} = 2,83 \text{ m/s}$$

Pour calculer λ , il faut calculer Re et ε/D :

$$R_e = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{2,83 \times 0,3}{1,005 \cdot 10^{-6}} = 8,44 \cdot 10^5 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,3}{300} = 0,001$$

Le diagramme de Moody donne : $\lambda = 0,0199 \approx 0,02$ (voir la figure ci-dessous)



$$\frac{P_0}{\rho g} = 15 + 0,02 \frac{170}{0,3} \frac{2,83^2}{2 \cdot 9,81} + (0,5 + 0,15 + 0,15 + 0,1) \frac{2,83^2}{2 \cdot 9,81} = 19,99 \text{ m} \approx 20 \text{ m}$$

$$P_0 = 196,2 \text{ KPa}$$

Solution de l'Application N° III.2 :

En appliquant l'équation de Bernoulli entre la surface libre du réservoir (appelée 1) et l'extrémité inférieure de la conduite désignée par B; on obtient :

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta H_{1-2}$$

Sachant que :

$$P_1^{abs} = P^{atm} \Rightarrow P_1^{effe} = 0$$

$$P_2^{abs} = P^{atm} \Rightarrow P_2^{eff} = 0$$

et $V_1 = 0$ (réservoir de grande capacité)

$$Z_1 = h + L_1 + L_2 + L_3$$

$$Z_2 = 0$$

Ainsi :

$$h = h + L_1 + L_2 + L_3 = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{1-2}$$

Avec :

$$\Delta H_{1-2} = \lambda_1 \frac{L_1 + L_2}{d_1} \cdot \frac{V_B^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_3}{d_2} \cdot \frac{V_2^2}{2g}$$

Or :

$$V_B \cdot S_B = V_2 \cdot S_2 \Rightarrow V_B = V_2 \cdot \frac{S_2}{S_B} = V_2 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

On obtient enfin :

$$h = h + L_1 + L_2 + L_3 = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 + \lambda_1 \frac{L_1 + L_2}{d_1} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 + \lambda_2 \cdot \frac{L_3}{d_2} \right]$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2g \cdot (h + L_1 + L_2 + L_3)}{\left[1 + \lambda_1 \frac{L_1 + L_2}{d_1} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 + \lambda_2 \cdot \frac{L_3}{d_2} \right]}}$$

Donc le débit est donné par :

$$Q = V_2 \cdot S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{2g \cdot (h + L_1 + L_2 + L_3)}{\left[1 + \lambda_1 \frac{L_1 + L_2}{d_1} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 + \lambda_2 \cdot \frac{L_3}{d_2} \right]}}$$

A.N :

$$\lambda_1 = 0,02 + \frac{0,5}{100} = 0,025$$

$$\lambda_2 = 0,02 + \frac{0,5}{150} = 0,0233$$

$$Q = \frac{\pi(0,15)^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{29,81 \cdot (5 + 4 + 10 + 3)}{\left[1 + 0,025 \frac{14}{0,1} \cdot \left(\frac{0,15}{0,1} \right)^4 + 0,0233 \cdot \frac{3}{0,15} \right]}}$$

$$Q = 0,0838 m^3 / s = 83,8 l / s$$

Calcul de la pression effective au point B :

En utilisant encore une fois l'équation de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et l'extrémité inférieure de la conduite, on obtient :

$$h + L_1 = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_{1-B} = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{V_B^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{P_B}{\gamma} = h + L_1 - \frac{V_B^2}{2g} \left[1 + \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \right]$$

$$V_B = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,0838}{\pi \cdot (0,1)^2} = 10,67 \text{ m/s}$$

$$\text{d'où : } \frac{P_B}{\gamma} = 5 + 4 - \frac{(10,67)^2}{2 \cdot 9,81} \left[1 + 0,025 \cdot \frac{4}{0,1} \right] = -2,6 \text{ m}$$

Chapitre IV : Les régimes d'écoulement dans les conduites, résistances hydrauliques

Application N° IV.1 :

Du fluide lourd circule de A à B par un tuyau d'acier de diamètre $D= 15$ cm et d'une longueur $L= 900$ m. Sa densité est évaluée à 0,915 et sa viscosité cinématique est de l'ordre de $4,13.10^{-4}m^2s^{-1}$. La pression en A est 110 m CE (colonne d'eau), celle en B de 3,5 m CE. Quelle est le débit circulant dans la conduite en l/s ?

Application N° IV.2 :

On veut transporter du fluide lourd à $15^{\circ}C$. Sa densité est 0,912 et sa viscosité cinématique est $2,05.10^{-4} m^2s^{-1}$. Déterminer le diamètre du tuyau à installer pour un débit de 22 l/s si on considère que la perte de charge disponible pour transporter ce fluide sur une longueur de 1000 m est de 22 m CE ?

Application N° IV.3 :

Un fluide de viscosité $\mu=4,5$ poises, de masse volumique 900 kg/m³, s'écoule dans une conduite cylindrique horizontale de diamètre $D= 200$ mm. La vitesse sur l'axe est de 4,5 m/s et on supposera l'écoulement est laminaire.

On donne : 1 Pa.s= 1 Poiseuille = 10 poises et 1 poise=1 g/cm.s

Calculer dans ces conditions :

- 1) La vitesse moyenne de l'écoulement et le débit volumique et massique,
- 2) Le nombre de Reynolds
- 3) La perte de charge par mètre, en hauteur du fluide et d'eau

Solutions des Applications

Chapitre IV : Les régimes d'écoulement dans les conduites, résistances hydrauliques

Solution de l'Application N° IV.1 :

On suppose que le régime est laminaire, d'où :

$$\Delta P = \rho g \Delta H = \lambda \cdot \frac{L \rho V^2}{2D} \quad \text{avec :} \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$
$$\Delta P = \rho g \Delta H = \frac{64\nu}{VD} \cdot \frac{L \rho V^2}{2D} = \frac{64\nu L \rho V}{2D^2}$$

$$\text{Soit :} \quad V = \frac{\rho_{eau} \cdot g \cdot \Delta H \cdot D^2}{32\nu \rho_{fluide} \cdot L} = \frac{9,81 \times 106,5 \times (0,15)^2}{(32 \times 4,13 \cdot 10^{-4} \times 0,915 \times 900)} = 2,16 \text{ m/s}$$

On vérifie de suite l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds : $Re= 784 < 2100$;

On en déduit le débit volumique : $Q= V \cdot \pi R^2 = 38,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 38,2 \text{ l/s}$

Solution de l'Application N° IV.2 :

On suppose que le régime est laminaire, d'où :

$$\Delta P = \rho g \Delta H = \lambda \frac{L \cdot \rho \cdot V^2}{2D} \quad \text{avec : } \lambda = \frac{64}{R_e}$$

$$\text{Et } 4Q = V \cdot \pi \cdot D^2 \quad \text{soit : } V = \frac{4Q}{\pi \cdot D^2}$$

$$\Delta P = \rho g \Delta H = \frac{64\nu}{V \cdot D} \cdot \frac{L \cdot \rho \cdot V^2}{2D} = \frac{64\nu \cdot L \cdot \rho \cdot V}{2D^2} = \frac{32\nu \cdot L \cdot \rho \cdot 4Q}{\pi \cdot D^2}$$

$$\text{Soit : } D^4 = \frac{128\nu L \rho_{\text{fluide}} Q}{\pi \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot \Delta H} = \frac{128 \times 2,05 \cdot 10^{-4} \times 1000 \times 0,912 \times 22 \cdot 10^{-3}}{\pi \times 9,81 \times 22} = 0,353 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

Soit $D = 0,077 \text{ m} = 7,7 \text{ cm}$

$$\text{La vitesse est de } V = \frac{4Q}{\pi \cdot D^2} = 4,72 \text{ m/s}$$

Et le nombre de Reynolds est de $R_e = 1774 < 2100$

Solution de l'Application N° IV.3 :

Si l'écoulement est laminaire, on sait que la vitesse de débit volumique est égale à la moitié de la vitesse maximale sur l'axe (profil parabolique)

Vitesse de débit : $V = V_{\text{max}} / 2 = 4,5/2 = 2,25 \text{ m/s}$

Débit volumique : $Q = V \cdot \pi D^2 / 4 = 2,25 \cdot \pi \cdot (0,2)^2 / 4 = 0,0706 \text{ m}^3/\text{s} = 70,6 \text{ l/s}$

Débit massique : $Q_m = \rho \cdot Q_v = 900 \cdot 0,0706 = 63 \text{ kg/s}$

La perte de charge sur une longueur (L) est : $\Delta P = \rho g \Delta H = \lambda \cdot \frac{L \rho V^2}{2D}$

Soit par mètre : $\frac{\Delta P}{L} = \frac{\rho g \Delta H}{L} = \lambda \cdot \frac{\rho V^2}{2D}$

On calcule d'abord le nombre de Reynolds : $\lambda = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{2,25 \cdot 0,2 \cdot 900}{0,45} = 900$

Donc régime laminaire

Aussi : $\lambda = \frac{64}{R_e}$ d'où la perte de charge en hauteur de fluide :

$$\Delta H_{\text{fluide}} = \frac{64 \rho_{\text{fluide}} V^2}{R_e \cdot 2D \cdot g \cdot \rho_{\text{fluide}}} = \frac{32 V^2}{R_e \cdot D \cdot g} = \frac{32 \times (2,25)^2}{900 \times 0,2 \times 9,81} = 0,0917 \text{ m}$$

Perte de charge en hauteur d'eau :

$$\Delta H_{\text{eau}} = \frac{64 \rho_{\text{fluide}} V^2}{R_e \cdot 2D \cdot g \cdot \rho_{\text{eau}}} = \frac{32 V^2 \cdot 0,9}{R_e \cdot D \cdot g} = \frac{32 \times (2,25)^2 \times 0,9}{900 \times 0,2 \times 9,81} = 0,08257 \text{ mCE}$$

Références Bibliographiques

- [ANDRE] Eléments de l'hydraulique ANDRE CAUVIN-Eyrolle.2 PARIS 1986.
- [ARMANDO LENCASTRE] "Hydraulique générale", Edition: Eyrolles.
- [BONNIN] Johanne BONNIN, Jean Christophe BUVAT, Xavier COSSON, Marie DEBACQ, Hélène DESMORIEUX et Corine LACOUR, Hydraulique pour le génie des procédés, UNIT, 17 janvier 2018
- [Clément] Clément DESODT– Hélène HORSIN MOLINARO Phénomènes de boulanges et d'érosion régressive (renard hydraulique) dans les barrages? Université PARIS SACLAY Edit' e le 16/09/2016
- [Dany] Dany Huilier, TD Pertes de charges exercices + corrigé LPAIL3S5, Licence LPAIL3S5, 15 octobre 2009.
- [Dunglas] Jean Dunglas : Stockage de l'eau : quel avenir pour les retenues collinaires? — Académie d'Agriculture de France– Février 2014.
- [Jean-Paul Beaudry, Jean-Claude Rolland Berger], Mécanique des fluides appliquée, 2e édition, Eds, 2009.
- [Joseph Katz, November 2010], Introductory Fluid Mechanics ; San Diego State University (www.cambridge.org/9780521192453)
- [Michel Carlier], "Hydraulique générale et appliquée", Edition: Eyrolles.
- [Moments and Product of Inertia], [e8befe9c-120c-4d94-8e11-65b5738b90df.pdf](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-9811-6_5) ;
- [Olivier] Olivier LOUISNARD, TDs de mécanique des fluides, <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/fr/>, San Francisco, California 94105, 2019.
- [Ouragh] ' Ecoulement forces en hydrauliques :1er et 2eme partie ouragh youcef-OPU-Alger.
- [Plaut] Emmanuel Plaut, Mécanique des fluides à Mines Nancy et université-lorraine. France, 2016.
- [Riadh] Riadh BEN HAMOUDA, Notions de mécanique des fluides cours et exercices corrigés, Centre de Publication Universitaire Tunisie 2008.
- [Schaum] Renald V. Giles, Jack B. Evett, Cheng Liu, Mécanique des fluides et hydrauliques, Cours et problèmes, 1994 la 3eme édition.
- [VAZ] José VAZQUEZ et Matthieu DUSFRESNE, Hydrostatique et Hydraulique en charge, Formation Mastère Eau Potable et Assainissement, ENGEES-Icube, 2014.
- [walter] Hydraulique fluviale : Tome1 : v16 écoulement permanent uniforme et non uniforme, walter H Graf 1993