Séminaire de Mathématiques et Informatique

Université Djilali Liabès - Sidi Bel Abbès - le 19 octobre 2024

Sur deux équations diophantiennes (approche actualisée)

Ali DEBBACHE

Faculté de Mathématiques. USTHB.

Résumé :

Bien que l'étude des équations diophantiennes remonte à Diophante d'Alexandrie au III^e siècle, des problèmes similaires avaient déjà été considérés par des civilisations antérieures, notamment celle de Babylone et celle de l'Égypte antique. Ici, on se pose deux problèmes distincts mais dont la solution est la même :

Problème 1 : Il s'agit de trouver les entiers naturels n et m tels que $\frac{n(n+1)}{2} = m^3$ (1)
qui est équivalent à une représentation sous la forme du carré d'un nombre impair moins le cube d'un nombre pair.

Problème 2 : On se donne le T(1) - *cube* $\{1, 2, 3\}$ et on cherche s'il est extensible.

On montre que le problème 2, est équivalent à résoudre l'équation de Thue $b^3 - 2a^3 = -1$.

La résolution de cette équation revient à calculer les éléments nuls d'une certaine suite récurrente linéaire.

L'intérêt de cette étude est double : on met en exergue un lien inattendu entre deux problèmes totalement distincts, d'une part, et on donne une idée de l'analyse p-adique en arithmétique, d'autre part.

Mots clés : Equations diophantines, Equation de Mordell, Equations de Thue, lemme de Hensel, Théorème de Strassman.

Mathematics Subject Classification : 11Dxx, 11D59, 11Yxx.

References

[1] F. Beukers "The zero-multiplicity of ternary reccurrences" Compositio Mathematica 77(2), 165–177, (1991)

[2] F. Beukers "The Diophantine equation $A^x p + B^y q = C^z r$" Duke Mathematical Journal, 91(1), 61–88, (1998)

[3] J.W.S. Cassels "Local fields" Cambridge University Press, (2012)

[4] F.Q. Gouvêa "p-adic Numbers : An Introduction" Springer (2020)

[5] B. Grechuk "Polynomial Diophantine Equations : A Systematic Approach", Springer, (2024)

[6] L.J. Mordell "Diophantine equations" Academic Press, (1969)