

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ DJILALI LIABÈS - SIDI BEL ABBÈS - LE SAMEDI 04 OCTOBRE 2025

Temps du pic épidémique dans un modèle SIR structuré par l'âge de l'infection

Ali Moussaoui

Université de Tlemcen

ali.moussaoui@univ-tlemcen.dz

Résumé

Le moment du pic épidémique joue un rôle central dans la planification des interventions de santé publique, telles que la quarantaine, la vaccination ou le traitement, et constitue également un indicateur essentiel pour la modélisation et la prévision de la dynamique des maladies infectieuses.

Dans ce travail, nous étudions un modèle épidémique de type SIR formulé sous forme d'équation aux dérivées partielles (EDP), où la classe des infectés est structurée par l'âge de l'infection. Nous commençons par établir l'équation de la taille finale de l'épidémie et prouvons l'existence et l'unicité de sa solution. Nous dérivons ensuite des estimations bilatérales de l'amplitude du pic épidémique ainsi que des bornes supérieure et inférieure pour le temps du pic. Nous montrons que, pour une population de grande taille, le temps du pic se comporte asymptotiquement comme

$$T \sim \frac{\ln N}{\lambda},$$

où N est la taille de la population et λ l'unique racine positive de l'équation caractéristique associée au modèle linéarisé.

Dans le cas particulier où les taux de transmission et de guérison sont constants, les bornes obtenues coïncident, ce qui fournit une expression asymptotique explicite pour le temps du pic. On retrouve alors le même résultat que pour le modèle SIR classique, ce qui met en évidence la cohérence et la généralisation de notre approche.

Mathematics Subject Classification : 92D30, 92D25

Keywords : Modèles épidémiques, Population structurée par âge, Nombre de reproduction de base, Taille finale, Pic épidémique.

References

- [1] Kermack W. O., McKendrick A. G., A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 1927; 115(772): 700–721.
- [2] Diekmann O., Heesterbeek J. A. P., Metz J. A., On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of Mathematical Biology*, 1990; 28: 365–382.
- [3] Moussaoui A., Meziane M., On the date of the epidemic peak. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2024; 21(2): 2835–2855.