Arithmétique d'un corps de nombres cubique[1]

Ali Debache
USTHB, Alger (à la retraite)
ali.debache1951@gmail.com

Résumé

Soit θ la racine réelle de $f(X) = X^3 + 4X + 1$, $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ la plus petite extension engendrée par $\mathbb{Q}$ et θ, $\mathcal{A}$ son anneau des entiers et $\mathcal{U}$ son groupe des unités.

Si K une extension finie du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, au point de vue arithmétique. Le corps K est bien connu si l'on sait déterminer ses entiers, ses unités, la manière dont les nombres premiers p se décomposent dans K, et le groupe des classes d'idéaux de K. Toutes ses caractéristiques sont fortement liées ; une manière d'aborder le problème est de chercher à déterminer l'anneau des entiers A de K.

Comme A est un $\mathbb{Z} - module$ sans torsion de type fini, il est libre sur $\mathbb{Z}$. Pour faciliter les calculs, on a intérêt à le chercher aussi simple que possible. En général, on essaie de trouver une base d'entiers du type suivant : $\left\{1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}\right\}$ pour $\alpha \in A$, $n = [K : \mathbb{Q}]$. Dans ce cas, on peut écrire $A = \mathbb{Z}[\alpha]$, et le calcul du discriminant du corps est aisé.

Le but de ce travail est de déterminer tous les entiers algébriques γ, tel-que : $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[\gamma]$. On verra que cela revient à trouver les zéros d'une suite récurrente cubique, ou à calculer les solutions entières d'une équation de Thue cubique, de déterminer son corps de décomposition, ses différents sous-corps, son groupe de Galois, les différents sous-groupes du groupe de Galois, ainsi que les nombres premiers qui se décomposent.

Références

[1] Y. Amice : "Les nombres p-adiques", P.U.F, Paris, 1975.
[2] J. Brestel : "Sur le calcul des zéros d'une suite récurrente linéaire", Exposé fait à l'I.R.R.I.A (Rocquencourt) en mars 1974
[3] F. Beurkers : "The zero-multiplicity of ternary reccurrences", Compositio Math. 77 (1991).
[4] F. Beukers : Diophantine equations, Springer-Verlag, Berlin 2011.
[5] S.I. Borevitch et I R.Shafarevitch : Theorie des nombres, Gauthiers-Villars, Paris, 1967.
[6] J.W.S. Cassels : "Local Fields", London Mathematical Society, Student Text 3, 1985.
[7] D.A. Marcus : Number Fields, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
[8] L.J. Mordell : Diophantine equations, Academic Press, 1969..
[9] P. Samuel : Théorie algèbrique, Collection Méthode, Edition 1971.

[1]Titre en anglais: **Arithmetic of a cubic number field**